Lösung zur 1. Übung

1. (a) Wegen der Orthonormalität der Basis gilt: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

   - $\vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 0$
   - $(7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_3) \cdot (2\vec{e}_3 - 15\vec{e}_2) = 10$
   - $(2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3) \cdot (10\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3) = 0$

   (b) Wir stellen die Vektoren durch einspaltige Matrizen dar, deren Elemente die Komponenten der Vektoren relativ zu einer Basis bedeuten. Hier wählen wir die drei Vektoren selbst als Basis, also z.B.:

$$\vec{e}_1 \to \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e}_2 \to \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e}_3 \to \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Um die Regel für die Skalarproduktbildung durch die Regel der Matrizenmultiplikation zu realisieren, muss der jeweils erste Faktor durch die sog. *transponierte* Matrix (also eine einzeilige Matrix) dargestellt werden:

   - $$\underline{e}_2^T \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = (0,1,0)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (0,1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
   - $$(7,0,5)\begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$
   - $$(2,4,-6)\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 20 + 16 - 36 = 0$$

   (c) Aus der Definition des Skalarproduktes folgt für den Winkel α zwischen den Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

   Mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3) = 10$ und $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$, $b = |\vec{b}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$ folgt

$$\alpha = \arccos \frac{10}{\sqrt{20 \cdot 26}} = \arccos 0.4385 = 63.99^o$$

Für den gesuchten Vektor $\vec{c}$ machen wir den Ansatz $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$; die Komponenten c_i $(i = 1, 2, 3)$ sind aus den geforderten Bedingungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{a} &= c_1 + 5c_2 &&= 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} &= 2c_2 - 4c_3 &&= 0 \end{aligned}$$

Das sind *zwei* algebraische Gleichungen für die *drei* unbekannten Komponenten von $\vec{c}$; wir können also nur Verhältnisse zwischen den Komponenten bestimmen, z.B.:

$$c_1 = -5c_2\,; \quad c_3 = \frac{1}{2}\,c_2\,; \quad c_2 - \text{beliebig!}$$

Wir setzen speziell: $\boxed{c_2 = +2 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -10\,; \quad c_3 = +1}$.
Man überzeugt sich leicht, dass dieses $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist. Natürlich erfüllt *jeder* zu $\vec{c}$ parallele Vektor $\alpha\vec{c}$ (mit beliebigem α) die geforderten Bedingungen.

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren ermöglicht uns einen *alternativen Lösungsweg*, da es senkrecht auf den beiden Faktorvektoren steht. Wir nehmen an, dass unsere drei Einheitsvektoren ein Rechtssystem bilden (dann gilt: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, und die daraus durch zyklische Indexvertauschung hervorgehenden Relationen) und erhalten:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \times (2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3) = 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_2 - 20\vec{e}_1$$

Dieser Vektor ist zu dem oben bestimmten parallel.

2. $\tau = T + T_s$; mit T - Fallzeit des Steins für die Strecke h, T_s - Laufzeit des Schalls auf der Strecke h;
   $T_s = h/c$ - gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit c;
   Der Fall des Steins ist eine gleichmässig beschleunigte Bewegung (Fallbeschleunigung g) mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit (entlang der z-Achse, beginnend bei $z = 0$); die Orts-Zeitfunktion $z(t)$ erhält man durch zweimaliges Integrieren aus der Beschleunigung:

$$\ddot{z}(t) = g \quad \Longrightarrow \quad \dot{z}(t) = gt \quad \Longrightarrow \quad z(t) = gt^2/2\,; \quad z(t = T) = h \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c}$$

Das kann man als quadratische Gleichung für $\sqrt{h}$ schreiben, deren positive Lösung wir aufsuchen:

$$\left(\sqrt{h}\right)^2 + 2\,\frac{c}{\sqrt{2g}}\,\sqrt{h} - \tau c = 0\,; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{h} = -\frac{c}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\frac{c^2}{2g} + \tau c}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{\left(\sqrt{c^2 + 2gc\tau} - c\right)^2}{2g}}$$

3. Gegeben ist die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t\Big)\vec{e}\,'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t\Big)\vec{e}\,'_2 \equiv x'\vec{e}\,'_1 + y'\vec{e}\,'_2 \quad (1)$$

(a) Fassen wir die Terme mit gleichen trigonometrischen Funktionen in (1) zusammen, so wird

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2\Big)\, a_1 \cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2\Big)\, a_2 \sin\omega t$$

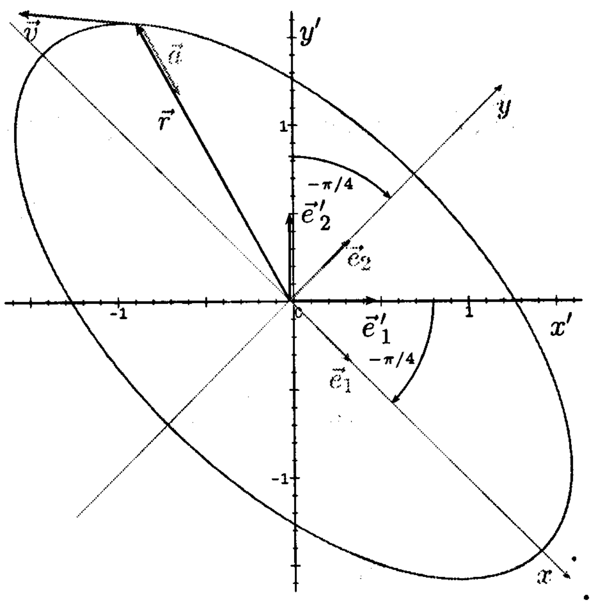
Führen wir die *neuen orthonormalen Basisvektoren*

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2\Big), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2\Big)$$

ein, so vereinfacht sich die Darstellung der Bahnkurve zu

$$\vec{r}(t) = a_1 \cos\omega t\, \vec{e}_1 + a_2 \sin\omega t\, \vec{e}_2 \equiv x\, \vec{e}_1 + y\, \vec{e}_2 \quad (2)$$

Bem.: Die neuen Basisvektoren gehen aus den alten durch eine Drehung um die z-Achse ($\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3$) um den Winkel $-\frac{\pi}{4}$ hervor.



Die Komponenten des Ortsvektors $x'_j = \vec{e}\,'_j \cdot \vec{r}$ transformieren sich dann auf $x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r}$ gemäss (man beachte die *Summenkonvention*, nach der über gleiche Indizes von 1 bis 3 zu summieren ist)

$$x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}\,'_j x'_j) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}\,'_j)\, x'_j \equiv \alpha_{ij} x'_j \qquad \text{oder in Matrixschreibweise:} \quad \underline{x} = \underline{\alpha x'}$$

mit der *Transformationsmatrix* α_{ij}, deren i-te Zeile die Richtungskosinuse des Basisvektors $\vec{e}_i$ zu den Basisvektoren $\vec{e}\,'_j$ bedeutet. Für die oben angegebene Drehung lautet α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 - x'_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 + x'_2) \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos\omega t \\ a_2 \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Eliminieren wir den Parameter ωt aus der Darstellung (2), dann ergibt sich

$$x = a_1 \cos\omega t\,,\ y = a_2 \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 = 1} \tag{3}$$

Das stellt eine Ellipse um den Ursprung mit den Halbachsen a_1 und a_2 dar.
(siehe auch: *Praktisches Rechnen, Kegelschnitte*)

(c) Mit (2) erhalten wir

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{a_1^2 \cos^2\omega t + a_2^2 \sin^2\omega t}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \omega(-a_1 \sin\omega t\,\vec{e}_1 + a_2 \cos\omega t\,\vec{e}_2)$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \omega\sqrt{a_1^2 \sin^2\omega t + a_2^2 \cos^2\omega t}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = -\omega^2(a_1 \cos\omega t\,\vec{e}_1 + a_2 \sin\omega t\,\vec{e}_2)$$

$$\text{also} \quad \boxed{\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2\,\vec{r}(t)} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \omega^2 r(t)$$

Bem.: Die eingerahmte Relation stellt die Bewegungsgleichung eines 3-dimensionalen harmonischen Oszillators dar.

(d) Allgemein ist $\dot{r}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{r}(t)| \neq |\dot{\vec{r}}(t)|$, denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{r}(t)| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\,2\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r} = |\dot{\vec{r}}(t)|\,\cos\sphericalangle(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \neq |\dot{\vec{r}}(t)|$$

Das Ungleichheitszeichen gilt, da i.a. $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ *nicht* parallel sind.
Für unser Beispiel wird

$$\dot{r}(t) = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r} = \frac{\omega(a_2^2 - a_1^2)\sin\omega t\,\cos\omega t}{\sqrt{a_1^2\cos^2\omega t + a_2^2 \sin^2\omega t}} \neq |\dot{\vec{r}}(t)| = \omega\sqrt{a_1^2 \sin^2\omega t + a_2^2\cos^2\omega t}$$

*(e) Um ωt in (1) zu eliminieren, lösen wir die Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t &= \sqrt{2}\, x' \\ -a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t &= \sqrt{2}\, y' \end{aligned}$$

nach $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ auf; Addition und Subtraktion beider Gleichungen (oder die CRAMERsche Regel) liefern

$$\cos\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}\, a_1}\,(x' - y')\,, \quad \sin\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}\, a_2}\,(x' + y')$$

Addition der Quadrate beider Ausdrücke liefert

$$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = \frac{1}{2a_1^2}\,(x' - y')^2 + \frac{1}{2a_2^2}\,(x' + y')^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad (a_1^2 + a_2^2)\, x'^2 + 2(a_1^2 - a_2^2)\, x'y' + (a_1^2 + a_2^2)\, y'^2 = 2a_1^2 a_2^2$$

Also lautet die gewünschte Darstellung (mit $\underline{x}'^T = (x'_1, x'_2)$; die dritte Komponente spielt keine Rolle; in $\hat{A}$ bestünden die dritte Zeile und Spalte aus Nullen)

$$\underbrace{\underline{x}'^T \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1^2 - a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}}_{\equiv \hat{A}} \underline{x}' = 2a_1^2 a_2^2 \tag{4}$$

Diagonalisieren (Hauptachsentransformation) von $\hat{A}$:
Die Relation

$$\hat{A}\vec{e} = \lambda\vec{e} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1^2 - a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

- mit dem *Eigenvektor* $\vec{e}$ und dem *Eigenwert* λ - stellt ein lineares homogenes algebraisches Gleichungssystem für die Komponenten e_i von $\vec{e}$ (relativ zur Basis $\vec{e}'_i$) dar, das nur dann von Null verschiedene Lösungen hat, falls seine Koeffizientendeterminante verschwindet, falls also

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 - \lambda & a_1^2 - a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 & a_1^2 + a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_1^2 + a_2^2 - \lambda)^2 - (a_1^2 - a_2^2)^2 = 0$$

Auflösen nach λ liefert die beiden Eigenwerte

$$(a_1^2 + a_2^2 - \lambda) = \pm(a_1^2 - a_2^2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_I = 2a_2^2\,, \quad \lambda_{II} = 2a_1^2$$

Setzen wir die beiden Eigenwerte nacheinander in die Gleichung (5) ein, so erhalten wir für die Eigenvektoren (*Beachte:* Wegen der verschwindenden Koeffizientendeterminante sind die beiden Gleichungen in (5) nicht mehr linear unabhängig voneinander; es kann eine gestrichen werden; somit lassen sich nur noch die Komponentenverhältnisse bestimmen. Als Zusatzbedingung fordern wir, dass die Eigenvektoren normiert seien.)

$$(a_1^2 - a_2^2)e_1^{(I)} + (a_1^2 - a_2^2)e_2^{(I)} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2^{(I)} = -e_1^{(I)} \;\Rightarrow\; \vec{e}^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2) = \vec{e}_1$$

$$(a_2^2 - a_1^2)e_1^{(II)} + (a_1^2 - a_2^2)e_2^{(II)} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2^{(II)} = e_1^{(II)} \;\Rightarrow\; \vec{e}^{(II)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2) = \vec{e}$$

Diskussion:

Wir sehen, dass die Eigenvektoren von $\hat{A}$ mit den in (a) gefundenen neuen Basisvektoren $\vec{e}_i$ identisch sind.

Wählt man nun die Eigenvektoren als neue Basis, so geht die Gleichung der Bahnkurve (4) über in

$$\underline{x}^T \begin{pmatrix} 2a_2^2 & 0 \\ 0 & 2a_1^2 \end{pmatrix} \underline{x} = 2a_1^2 a_2^2 , \tag{6}$$

wobei die $\underline{x}$ nun die Komponenten (x, y) des Ortsvektors relativ zur Basis der Eigenvektoren ($\vec{e}^{\,(I)} = \vec{e}_1$, $\vec{e}^{\,(II)} = \vec{e}_2$) enthalten; damit wird

$$\Rightarrow \quad 2a_2^2 x^2 + 2a_1^2 y^2 = 2a_1^2 a_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1}$$

also wieder (3) aus (b).

Die Hauptachsentransformation stellt also die systematische Methode zur Vereinfachung bilinearer Ausdrücke dar; die in (a) intuitiv gefundenen Basisvektoren sind die Eigenvektoren der den bilinearen Ausdruck definierenden Matrix.

Begründung von (6):

Von der Darstellung der Bahnkurve (4) relativ zur Basis $\vec{e}\,'_i$

$$c = x'_i A'_{ij} x'_j \quad \Rightarrow \quad c = (\vec{r} \cdot \vec{e}\,'_i) A'_{ij} (\vec{e}\,'_j \cdot \vec{r}) \quad \Rightarrow \quad c = \vec{r} \cdot \left(A'_{ij} \vec{e}\,'_i \circ \vec{e}\,'_j \right) \cdot \vec{r}$$

gelangen wir durch Definition des Tensors $\hat{A} \equiv A'_{ij} \vec{e}\,'_i \circ \vec{e}\,'_j$ (wobei $\circ$ das dyadische Produkt zweier Vektoren bezeichnet) zur koordinatenfreien Darstellung unserer Kurve

$$c = \vec{r} \cdot \hat{A} \cdot \vec{r} \tag{7}$$

Das ist die allgemeine Form einer sog. *Kurve zweiter Ordnung*, die ihre einfachste Darstellung relativ zu dem Basissystem hat, in dem $\hat{A}$ nur Diagonalelemente - nämlich die Eigenwerte - enthält; die zu dieser Basis gehörigen Basisvektoren sind die Eigenvektoren von $\hat{A}$.

Stellen wir den Ortsvektor nun in der Basis der Eigenvektoren ($\vec{e}_1 = \vec{e}^{\,(I)}, \vec{e}_2 = \vec{e}^{\,(II)}$) dar, also $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$, so folgt mit der Eigenwertgleichung (5) aus (7) (zur Sicherheit schreiben wir Summen explizit)

$$c = \sum_{i,j=1}^{2} (x_i \vec{e}_i) \cdot \underbrace{\hat{A} \cdot (\vec{e}_j}_{=\lambda_j \vec{e}_j} x_j) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{=\delta_{ij}} \lambda_j x_j = \underline{x}^T \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 \\ 0 & \lambda_{II} \end{pmatrix} \underline{x} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i x_i^2 = \lambda_I x^2 + \lambda_{II} y^2$$

also tatsächlich (6).

Bemerkung:

Die Matrix der Eigenvektoren $\alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}\,'_j$, d.h. die Matrix, deren Zeilen die Komponenten der Eigenvektoren relativ zur Basis $\vec{e}\,'_j$ darstellen, ist die Transformationsmatrix für Vektoren (und Tensoren) von der Basis $\vec{e}\,'_j$ auf die Basis $\vec{e}_i$ der Eigenvektoren, gemäss

$$x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}\,'_j) x'_j = \alpha_{ij} x'_j \, ; \qquad \underline{x} = \underline{\alpha}\, \underline{x}'$$

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \hat{A} \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \left(A'_{kl} \vec{e}\,'_k \circ \vec{e}\,'_l \right) \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ik} \alpha_{jl} A'_{kl}$$

das gilt für jeden Tensor zweiter Stufe. Speziell für unser $\hat{A}$, dessen Eigenvektoren die neue Basis bilden, ist natürlich (nachrechnen!)

$$A_{ij} = \lambda_{\dot{i}}\delta_{\dot{i}j} = \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 \\ 0 & \lambda_{II} \end{pmatrix}$$

(der Punkt unter dem Index $\dot{i}$ bedeutet, dass über diesen Index *nicht* zu summieren ist).