Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. G. Soff

Theoretische Mechanik SS 04

Lösung zur 2. Übung

1. (a) $V(x, y, z) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

$$
\begin{aligned}
F_x &= -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = -kx \\
F_y &= -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2) = -ky \\
F_z &= -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2) = -kz
\end{aligned}
$$

Das kann als Vektor zusammengefasst werden: $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Es handelt sich also um die Kraft eines 3-dimensionalen harmonischen Oszillators (elastische Bindung an den Ursprung).

(b) $V(x, y, z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$
\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
F_y &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
F_z &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Das kann als Vektor zusammengefasst werden:

$$
\vec{F}(\vec{r}) = -c\,\frac{\vec{r}}{(\vec{r}^{\,2})^{3/2}} = -c\,\frac{\vec{r}}{r^3} = -c\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r
$$

mit $r = |\vec{r}|$ (Betrag des Ortsvektors) und $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ (Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors). Die Kraft zeigt stets radial auf den Ursprung zu und ist dem Quadrat des Abstandes vom Ursprung umgekehrt proportional.
Physikalische Beispiele: Gravitationskraft (zwischen zwei Massen) und Coulombkraft (zwischen zwei Ladungen).

2. *Vorbemerkung:* Um die Darstellung des Ortsvektors relativ zu den neuen Basisvektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ (die in den hier vorliegenden Beispielen orthogonal sind) zu gewinnen, muss man die Komponenten von $\vec{r}$ relativ zu dieser Basis ermitteln:

$$
\vec{r} = (\vec{r}\cdot\vec{e}_u)\,\vec{e}_u + (\vec{r}\cdot\vec{e}_v)\,\vec{e}_v + (\vec{r}\cdot\vec{e}_w)\,\vec{e}_w\,, \qquad (1)
$$

wobei man die Vektoren in den runden Klammern relativ zum kartesischen Basissystem darstellt.

(a) **Kugelkoordinaten:** $\vec{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + r\cos\vartheta\,\vec{e}_z$
Die r-Linien sind vom Ursprung ausgehende Strahlen; die ϑ-Linien bilden Kreise mit dem Ursprung als Mittelpunkt und die φ-Linien stellen Kreise um die z-Achse dar.

$$\frac{\partial\vec{r}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z = \vec{e}_r$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist 1.)

$$\frac{\partial\vec{r}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} = r\cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y - r\sin\vartheta\,\vec{e}_z$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist r.)

$$\frac{\partial\vec{r}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi} = -r\sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_y$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist $r\sin\vartheta$.)
Damit erhalten wir für die **Basisvektoren der Kugelkoordinaten:**

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\vartheta\,\vec{e}_z\\ \vec{e}_\vartheta &= \cos\vartheta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\vartheta\,\vec{e}_z\\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

Wie man sich leicht anhand der Anschauung überzeugt, bilden die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ ein *Rechtssystem*. Man kann das auch mit Hilfe des Kreuzproduktes prüfen; es gilt tatsächlich: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$ (und zyklische Vertauschung der Vektoren).
Die Darstellung des Ortsvektors ist sofort ersichtlich: $\boxed{\vec{r} = r\,\vec{e}_r}$
Für die Ableitungen der Basisvektoren erhält man:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\vartheta} = \vec{e}_\vartheta & \dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi\\
\dfrac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial\vartheta} = -\vec{e}_r & \dfrac{\partial\vec{e}_\vartheta}{\partial\varphi} = \cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi\\
\dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\vartheta} = 0 & \dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\vartheta\,\vec{e}_r - \cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta
\end{array}$$

Hinweis: Nach Bilden der jeweiligen Ableitung erhält man deren Darstellung relativ zur neuen Basis analog zur *Vorbemerkung*, wobei $\vec{r}$ durch die jeweilige Ableitung zu ersetzen ist.

(b) **Zylinderkoordinaten:** $\vec{r}(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi\,\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$
Die ρ-Linien sind an der z-Achse beginnende Strahlen senkrecht zur z-Achse; die φ-Linien bilden Kreise um die z-Achse und die z-Linien sind Parallelen zur z-Achse.

$$\frac{\partial\vec{r}(\rho,\varphi,z)}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\rho$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist 1.)

$$\frac{\partial \vec{r}(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} = -\rho \sin\varphi \, \vec{e}_x + \rho \cos\varphi \, \vec{e}_y$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist ρ.)

$$\frac{\partial \vec{r}(\rho, \varphi, z)}{\partial z} = \vec{e}_z$$

(Der Betrag des errechneten Vektors ist 1.)

Damit erhalten wir für die **Basisvektoren der Zylinderkoordinaten:**

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos\varphi \, \vec{e}_x + \sin\varphi \, \vec{e}_y \, , \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \vec{e}_x + \cos\varphi \, \vec{e}_y \, , \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z}$$

Wie man sich wieder leicht anhand der Anschauung überzeugt, bilden die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_\rho \, , \vec{e}_\varphi \, , \vec{e}_z$ ein *Rechtssystem.* Prüfung mit dem Kreuzprodukt ergibt: $\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ (und zyklische Vertauschung).

Die Darstellung des Ortsvektors ist ersichtlich: $\boxed{\vec{r} = \rho \, \vec{e}_\rho + z \, \vec{e}_z}$

Für die Ableitungen der Basisvektoren erhält man:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi & \dfrac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_\rho & \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} = 0 & \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0
\end{array}$$

*(c) **Geschwindigkeit und Beschleuningung in Kugelkoordinaten:**
Ausgangspunkt für die Geschwindigkeitsberechnung ist:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \, \vec{e}_r + r \, \dot{\vec{e}}_r \, .$$

Man erkennt also, dass die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren benötigt werden, die mit Hilfe des totalen Differentials berechnet werden können,

$$d\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \varphi} d\varphi \, ,$$

wobei j hier für $j = r, \vartheta, \varphi$ steht. Somit erhält man

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} = \dot{\vec{e}}_j = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \, .$$

Angewendet auf die Basisvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ findet man folgende Ergebnisse:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta} \, \vec{e}_\vartheta + \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \, \vec{e}_\varphi \, ,$$

$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \, \vec{e}_r + \cos\vartheta \, \dot{\varphi} \, \vec{e}_\varphi \, ,$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\sin\vartheta \, \dot{\varphi} \, \vec{e}_r - \cos\vartheta \, \dot{\varphi} \, \vec{e}_\vartheta \, .$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich damit zu

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\,.$$

Die Beschleuningung erhält man auf analoge Weise:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\dot{\vartheta}\,\dot{\vec{e}}_\vartheta + \dot{r}\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi +$$

$$r\,\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\sin\vartheta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi$$

und nach Einsetzen ermittelt man folgendes Endergebnis

$$\ddot{\vec{r}} = b_r\,\vec{e}_r + b_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + b_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

mit

$$b_r = \ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2 - r\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$
$$b_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\,\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$
$$b_\varphi = \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi})\,.$$

Bemerkung: Setzt man $\vartheta = \pi/2$, hat man sofort die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten der Ebene gefunden:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

und

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi\,.$$

3. Beide Zeiger führen eine *gleichförmige Rotation* aus:

$$\begin{aligned} \text{grosser Zeiger:}\quad \varphi_1 &= \frac{2\pi}{T_1}\,t\,, \quad T_1 = 1\text{h} \\ \text{kleiner Zeiger:}\quad \varphi_2 &= \frac{2\pi}{T_2}\,t\,, \quad T_2 = 12\text{h} \end{aligned}$$

Übereinanderstehen der Zeiger zur Zeit $t_n|$: $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi\,n\,, \quad (n = 1, 2, \dots)$

$$\Longrightarrow \frac{n}{t_n} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \Longrightarrow \boxed{t_n = n\,\tfrac{T_1T_2}{T_2-T_1} = n\,\tfrac{12}{11}\,\text{h} = n\,(1\text{h}\,5\text{min}\,27,27\dots\text{s})}$$

Es gibt also 11 verschiedene Möglichkeiten für übereinanderstehende Zeiger.