Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. G. Soff	Theoretische Mechanik SS 04

Lösung zur 6. Übung

1. (a) Dadurch kann das Raumschiff schon die Bahngeschwindigkeit v_E der Erde um die Sonne als Beitrag zur Einschussgeschwindigkeit in die elliptische Flugbahn nutzen. Es gilt für eine kreisförmige Umlaufbahn der Erde um die Sonne mit der Periode T_E ($\epsilon_{\mathrm{E}} = 0.017$)

$$v_E = \omega_E R_E = \frac{2\pi}{T_E} R_E \approx 30\mathrm{km/s} \quad \text{mit} \quad T_E = 1a.$$

(b) Die Flugbahn sei eine KEPLERellipse ($\epsilon < 1$)

$$r(\phi) = \frac{k}{1 + \epsilon\cos\phi},$$

mit

$$k = \frac{L^2}{\gamma M m^2} \quad \text{und} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\gamma^2 M^2 m^3}}. \tag{1}$$

Für die Bahnkurve soll gelten:

$$r(0) = R_E = \frac{k}{1+\epsilon},$$
$$r(\pi) = R_U = \frac{k}{1-\epsilon}.$$

Daraus folgt für ϵ und k

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{R_U - R_E}{R_U + R_E} = 0.9, \\ k &= R_E\,(1+\epsilon) = 1.9\mathrm{AU}. \end{aligned}$$

Die grosse und kleine Halbachse der Ellipse bestimmen sich zu

$$a = \frac{k}{1-\epsilon^2} = \frac{1}{2}(R_E + R_U) = 10.1\mathrm{AU},$$
$$b = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = a\sqrt{1-\epsilon^2} = 4.4\mathrm{AU}.$$

(c) Aus Gl. 1 folgt für die Energie der Bewegung

$$E = -\frac{\gamma m M}{2a} = \frac{m}{2}v(r)^2 - \frac{\gamma m M}{r}.$$

Für die Geschindingkeit ergibt sich damit

$$v(r) = \sqrt{2\gamma M(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}}\sqrt{\frac{R_E}{r}(1 - \frac{r}{2a})}\ .$$

Betrachten wir nun die minimale Fluchtgeschwindigkeit eines Raumschiffes aus dem Gravitationsbereich der Sonne, wenn das Schiff den anfänglichen Abstand R_E zur Sonne hat. Es gilt

$$E = \frac{m}{2}v_{\mathrm{Fl}}^2 - \frac{\gamma m M}{R_E} = 0,$$

daraus folgt

$$v_{\mathrm{Fl}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}} = \sqrt{2} v_E \approx 42\mathrm{km/s},$$

und damit

$$v(r) = v_{\mathrm{Fl}} \sqrt{\frac{R_E}{r}(1 - \frac{r}{2a})} \ .$$

Für die notwendige Einschussgeschwindigkeit im Perihel der Ellipsenbahn folgt mithin

$$v_p = v(R_E) = v_{\mathrm{Fl}} \sqrt{1 - \frac{R_E}{2a}} = v_{\mathrm{Fl}} \sqrt{\frac{R_U}{R_E + R_U}} \approx 41\mathrm{km/s} \ .$$

Beim Start in Richtung des Erdumlaufs muss dem Schiff somit die Zusatzgeschwindigkeit $\tilde{v}_p = v_p - v_E \approx 11\mathrm{km/s}$ erteilt werden. Hinzu kommt noch die zusätzliche Anfangsgeschwindigkeit v_{Fl}^E um die Erdanziehung zu überwinden:

$$v_{\mathrm{Fl}}^E = \sqrt{\frac{2\gamma M_E}{r_E}} = \sqrt{2 g r_E} \approx 11\mathrm{km/s}$$

(r_E - Erdradius, M_E - Erdmasse, g - Erdbeschleunigung).
Die Flugdauer τ bis zum Uranus erhalten wir aus dem 3. Keplerschen Gesetz:

$$\tau = \frac{T_{\mathrm{RS}}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_E}\right)^{3/2} T_E \approx 16a.$$

Bemerkung: Die Flugdauer lässt sich bei äquivalentem Energieaufwand um 11 Jahre verkürzen, indem eine durch das Gravitationsfeld des Jupiter unterstützte Bahnkurve ("swingby") gewählt wird (s. Greiner: Mechanik I, S. 346ff).

2. (a) Die (eindimensionale) Impulsbilanz bei äusserer Kraft $-mg$ (Bewegungsglg.) lautet

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -mg \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = -mg\,\mathrm{d}t\,;$$

wobei $\mathrm{d}p$ die Änderung des Gesamtimpulses (Rakete *und* in $\mathrm{d}t$ ausgestossene Verbrennungsgase) bedeutet. Aus dieser Impulsbilanz versuchen wir die Bewegungsglg. für die Rakete allein zu gewinnen:

$$\overbrace{\underbrace{m(t+\mathrm{d}t)\,v(t+\mathrm{d}t)}_{\text{Impuls Rakete zu } t+\mathrm{d}t} + \underbrace{|\mathrm{d}m|\,\underbrace{(v(t)-v_g)}_{\text{Gasgeschw. im Inertialsystem}}}_{\text{Impuls des ausgestossenen Gases } |\mathrm{d}m|}}^{\text{Gesamtimpuls zu } t+\mathrm{d}t} - \underbrace{m(t)\,v(t)}_{\text{Impuls Rakete zu } t} = -mg\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Division durch } \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) + \frac{|\mathrm{d}m|}{\mathrm{d}t}(v - v_g) = -mg\,.$$

Nach Anwenden der Produktregel im ersten Term und Beachten von $\mathrm{d}m < 0$, $\mu = -\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ erhalten wir die Bewegungsgleichung für die Rakete:

$$\boxed{m(t)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mu(t)\,v_g(t)}_{\text{Schubkraft}} - m(t)g} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu(t)\,v_g(t)}{m(t)} - g\,.$$

Für den Massenverlust der Rakete in $\mathrm{d}t$ kann man schreiben: $\mathrm{d}m = -\rho_g A v_g\,\mathrm{d}t$; woraus für den Zusammanhang zwischen μ und v_g folgt: $\boxed{\mu = \rho_g A v_g}$.

(b) Mit $-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \mu = const$ erhält man: $\boxed{m(t) = m_0 - \mu t}$. Zur Zeit $t = t^* = \frac{m_0}{\mu}$ ist also die gesamte Raketenmasse "verheizt"; die Beschleunigungsphase kann also höchstens bis $t = t^*$ dauern; mit dieser charakteristischen Zeit t^* lässt sich eine *dimensionslose Zeit* $\tau = t/t^*$ definieren.

Mit dem $m(t)$ und mit einer konstanten Ausströmgeschwindigkeit v_g ergibt sich eine Differentialglg. für $v(t)$ in der Beschleunigungsphase ($\tau < 1$), die direkt integriert werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu v_g}{m_0 - \mu t} - g \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \mathrm{d}t'\,\frac{\mathrm{d}v(t')}{\mathrm{d}t'} = \int_0^t \mathrm{d}t'\left(\frac{\mu v_g}{m_0 - \mu t'} - g\right)$$

Mit $v(0) = 0$ wird

$$\boxed{v(t) = v_g \ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt} = v_g \ln\frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_0}t} - g\frac{m_0}{\mu}\frac{\mu}{m_0}t$$

Im letzten Term sehen wir, dass sich eine charakteristische Geschwindigkeit $v^* \equiv g\frac{m_0}{\mu} = gt^*$ definieren lässt; damit führen wir den Parameter $\nu \equiv \frac{v_g}{v^*}$ ein und schreiben die *Lösung in dimensionsloser Form*:

$$\frac{v}{v^*} \equiv \boxed{\Phi(\tau) = \nu \ln \frac{1}{1-\tau} - \tau}\,; \quad \tau < 1$$

Das Verhalten in der *Startphase* erhalten wir für $\tau \ll 1$, also:

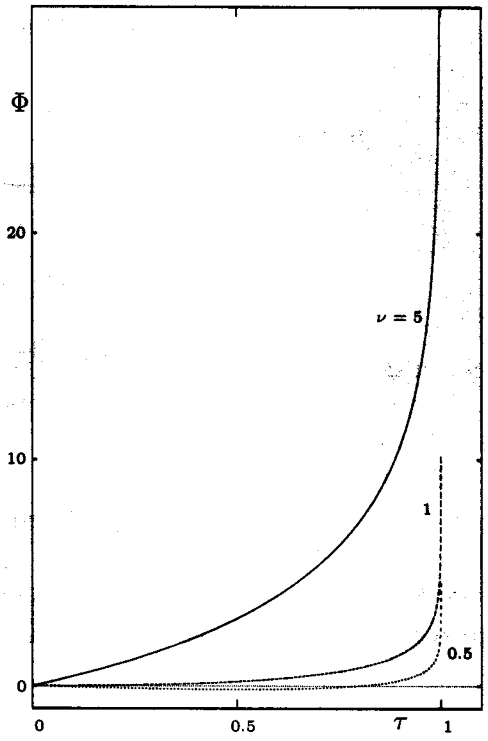
$$\begin{aligned} \tau \ll 1 \;\Rightarrow\; \Phi &\approx \nu \ln(1 + \tau \pm \cdots) - \tau \\ &\approx \tau(\nu - 1) + \cdots \end{aligned}$$

(Hier haben wir zunächst das Argument des ln in eine TAYLORreihe entwickelt und dann den Logarithmus selbst, für den gilt: $\ln(1+x) \approx x$, falls $x \ll 1$).

Die Geschwindigkeit in der Startphase ist also nur positiv, falls $\nu > 1$; geschrieben in den physikalischen Grössen heisst das:

$$t \ll \frac{m_0}{\mu}: \quad v(t) > 0, \text{ falls } \mu v_g > mg\,;$$

d.h., die Schubkraft muss grösser als das Anfangsgewicht der Rakete sein.



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm
(für $\nu = 5,\, 1,\, 0.5$)

3. Mit $\vec{F}(\vec{r},t) = -\frac{\partial V(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}$ lautet die mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ multipizierte Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}(t)\right) = -\dot{\vec{r}}(t) \cdot \frac{\partial V\big(\vec{r}(t),t\big)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\mathrm{d}V\big(\vec{r}(t),t\big)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V\big(\vec{r}(t),t\big)}{\partial t}$$

Damit kann geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}(t) + V\big(\vec{r}(t),t\big)\right) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = \frac{\partial V\big(\vec{r}(t),t\big)}{\partial t} \tag{2}$$

Die Energie $E(t)$ ist also *keine* Konstante mehr, sie ändert sich mit der Zeit. Um die rechte Seite angeben zu können, muss man die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ bereits kennen; (2) ist damit *keine* Hilfe bei der Integration der Bewegungsgleichung.

Bem.: Die Wegunabhängigkeit des Linienintegrals der Kraft gilt nur noch bei *festgehaltener* Zeit t.