Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. S. Kobe

Theoretische Mechanik SS 04

Lösung zur 8. Übung

1. (a) Damit das Teilchen in Σ' ruht ($\vec{v}\,'=0$) muss gelten

$$m\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}=\vec{F}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_o)\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \vec{F}=m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_o)$$

(Wegen $\vec{v}\,'=0$ tritt *keine* CORIOLISkraft auf!) Damit das Teilchen im rotierenden Bezugssystem in Ruhe bleibt, muss also ständig eine Kraft $\vec{F}$ die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_o)$ kompensieren (z.B. Haftreibung, Zwangskraft, ...).

(b) Es gilt: $m\ddot{\vec{r}}=0$, $\dot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{r}}(0)=0$, $\vec{r}(t)=\vec{r}(0)=\vec{r}_o$. Der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten ist: $\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\stackrel{!}{=}0$, also gilt:

$$\boxed{\vec{v}\,'=\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t)=-\vec{\omega}\times\vec{r}(t)}\,;\qquad \vec{r}=\vec{r}_o \tag{1}$$

Um die Ableitung auf der linken Seite (zeitliche Änderung, gesehen durch den mitrotierenden Beobachter, d.h. relativ zur rotierenden Basis) einfach bilden zu können, müssen wir $\vec{r}$ nach der rotierenden Basis $\vec{e}\,'_m$ zerlegen $\vec{r}=\sum_m x'_m\vec{e}\,'_m$ (und dort nur die x'_m differenzieren); auf der rechten Seite zerlegen wir $\vec{r}$ ebenfalls bzgl. der rotierenden Basis.

$$\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\sum_m x'_m\vec{e}\,'_m=-\vec{\omega}\times\sum_n x'_n\vec{e}\,'_n \;\Rightarrow\; \boxed{\sum_m\frac{\mathrm{d}x'_m}{\mathrm{d}t}\vec{e}\,'_m=\sum_n(-\vec{\omega})\times\vec{e}\,'_n x'_n}\,; \tag{2}$$

mit der Anfangsbedinung $x'_m(0)=x_{om}$. Die Bewegungsgleichung im rotierenden System liefert dann mit (1):

$$m\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,'-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,'+m\vec{\omega}\times\vec{v}\,'=-m\vec{\omega}\times\vec{v}\,',$$

in Übereinstimmung mit (1).

(2) beschreibt eine *Kreisbewegung* mit der Winkelgeschwindigkeit $-\vec{\omega}$ (siehe 3.Übung, Aufg.3).

(*) *Zur Transformation zwischen den Bezugssystemen*

Bei Anwendungen benötigt man den direkten Zusammenhang der Vektorkomponenten in beiden Systemen. Der Zusammenhang zwischen den Komponenten *eines* Vektors relativ zu verschiedenen Basissystemen mit der Transformationsmatrix α lautet:

$$\vec{r}=\sum_m x'_m\vec{e}\,'_m=\sum_k x_k\vec{e}_k \quad\Rightarrow\quad x'_m=\vec{e}\,'_m\cdot\vec{r}=\sum_k\alpha_{mk}x_k\,,\ \text{mit } \alpha_{mk}=\vec{e}\,'_m\cdot\vec{e}_k\,;\quad \boxed{x'=\alpha x} \tag{3}$$

O.B.d.A. wählen wir $\vec{\omega}=\omega\vec{e}_3$ und $\vec{e}\,'_k(t=0)=\vec{e}_k$. Wie man sich geometrisch klarmacht, gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{e}\,'_1&=+\cos\omega t\,\vec{e}_1+\sin\omega t\,\vec{e}_2\\ \vec{e}\,'_2&=-\sin\omega t\,\vec{e}_1+\cos\omega t\,\vec{e}_2\\ \vec{e}\,'_3&=+\vec{e}_3\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \alpha=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t & 0\\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad \vec{e}\,'_m=\sum_k\alpha_{mk}\vec{e}_k \tag{4}$$

Liegt also in unserem Beispiel das Teilchen im Inertialsystem bei $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)^\top$, so findet es der mitrotierende Beobachter bei

$$\begin{pmatrix} x'_o \\ y'_o \\ z'_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o\cos\omega t + y_o\sin\omega t \\ -x_o\sin\omega t + y_o\cos\omega t \\ z_o \end{pmatrix}$$

Das Teilchen beschreibt also für den mitrotierenden Beobachter in der Ebene $z' = z_o$ einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ und dem Radius $x'^2 + y'^2 = x_o^2 + y_o^2$.

Bem.: Die Transformation (4) der Basis kann auch analytisch aus der Gleichung für die starre Rotation eines Vektors $\vec{e}'_m$ hergeleitet werden. Mit (4) und der Konstanz der Basis $\vec{e}_k$ wird

$$\dot{\vec{e}}'_m = \vec{\omega} \times \vec{e}'_m \;\Rightarrow\; \sum_k \dot{\alpha}_{mk}\vec{e}_k = \sum_l \vec{\omega} \times \vec{e}_l\,\alpha_{ml} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{mj} = \omega \sum_l \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_l \times \vec{e}_j)\,\alpha_{ml}} \tag{5}$$

(Um die letzte Relation zu erhalten, wurde die mittlere Gleichung mit $\vec{e}_j$ multipiziert und die Orthogonalität der Basis ausgenutzt, sowie die Faktoren im Spatprodukt geeignet umgeordnet und $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$ eingesetzt.) (5) stellt ein DGL-System für die Transformationsmatrix α_{mj} dar, das mit der *Anfangsbedingung*

$$\alpha_{mj}(0) = \vec{e}'_m(0) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_m \cdot \vec{e}_j = \delta_{mj} \tag{6}$$

zu lösen ist. Ausgeschrieben lautet (5)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{m1} + \omega\alpha_{m2} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{m2} - \omega\alpha_{m1} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{m3} &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung führt sofort mit (6) auf die Lösung für die dritte Spalte von α

$$\alpha_{m3}(t) = \alpha_{m3}(0) = \delta_{m3} \quad\Rightarrow\quad \alpha_{13} = 0\,,\ \alpha_{23} = 0\,,\ \alpha_{33} = 1\,.$$

Die anderen beiden Gleichungen lassen sich mit der in Aufg.3 vorgestellten Methode behandeln; dazu multiplizieren wir die zweite Gleichung mit der imaginären Einheit i, addieren sie zur ersten Gleichung hinzu, definieren die *komplexe* Grösse $\mathcal{A}_m = \alpha_{m1} + i\alpha_{m2}$ und erhalten so eine homogene DGL mit konstanten Koeffizienten für $\mathcal{A}_m$, die sich sofort lösen lässt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}_m - i\,\omega\mathcal{A}_m = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_m = \mathcal{C}\,e^{i\,\omega t}\,, \quad \text{mit (6) wird} \quad \mathcal{A}_m = (\delta_{m1} + i\,\delta_{m2})\,e^{i\,\omega t}$$

Hieraus erhalten wir sofort (durch Bildung von Real- und Imaginärteil) die erste und zweite Spalte von α, so dass sich tatsächlich (4) ergibt.

2. Wir müssen beachten, dass das Laborsystem rotiert *und* sich ausserdem sein *Ursprung O' beschleunigt* bewegt (Ortsvektor $\vec{R}$ vom Ursprung O des Inertialsystems im Erdmittelpunkt zum Ursprung O' des Laborsystems auf der Erdoberfläche), also ist $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$; die Bewegungsgleichung in Σ' lautet also

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m\vec{g}_o - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Hierbei soll $\vec{g}_o$ die *reine* Schwerebeschleunigung sein. Grössenordnungsmässig gilt für das Verhältnis des vorletzten Terms zum letzten $\frac{r'\omega}{v'} \ll 1$; man beachte, dass

$\omega = 2\pi/1\text{Tag} = 7.27 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$ ist. Man kann also den Zentrifugalterm gegen den CORIOLISterm für alle Labordimensionen vernachlässigen. $\vec{R}$ bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einem Kreis; also $\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, woraus $\ddot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$ folgt. Die durch $\ddot{\vec{R}}$ hervorgerufene Kraft wirkt auf jedes Massenelement der Erde selbst $\Rightarrow$ Verformung der Erde so, dass sich die Erdoberfläche *senkrecht* zur resultierenden Kraft $m(\vec{g}_o - \ddot{\vec{R}})$ einstellt $\Rightarrow$ Abplattung an den Polen. Wir führen die *lokale Schwerebeschleunigung* $\boxed{\vec{g} \equiv \vec{g}_o - \ddot{\vec{R}}}$ ein, die senkrecht auf der (realen) Erdoberfläche steht und erhalten so die angegebene Gleichung

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\vec{g} + \vec{F} - 2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' \qquad \text{q.e.d.} \tag{7}$$

3. Gemäss (7) lautet die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator (Eigenfrequenz ω_o) in der $(x$-$y)$-Ebene des rotierenden System (Striche an den Koordinaten zur Vereinfachung weggelassen!)

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\,\vec{r} + 2\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = 0\,; \qquad \vec{r}(0) = (a, 0)\,, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{0} \tag{8}$$

$\longrightarrow$ *Modell eines Pendels* (Länge l) für *kleine* Ausschläge $a \ll l$, denn für das Pendel (Ruhelage im Ursprung) haben wir:

$V(\vec{r}) = mgz\,;$ Nebenbedingung: $x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2 \;\Rightarrow\; z = l - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}$

Entwickeln wir nun die Wurzel für $x, y \leq a \ll l$, so entsteht

$$z = l\left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}}\right] \approx l\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)\right] = \frac{x^2 + y^2}{2l}$$

und damit lautet das Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,m\omega_o^2(x^2 + y^2)\,; \quad \omega_o^2 = \frac{g}{l}\,; \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -m\omega_o^2\vec{r} \quad \text{q.e.d.}$$

Bem.: Die in Aufg.4. gemachte Vernachlässigung des Zentrifugalterms ist hier gerechtfertigt, denn: $\omega a \ll v \sim \omega_o a$, d.h. $\omega \ll \omega_o = \sqrt{g/l}$, da die Schwingungsdauer des Pendels natürlich sehr viel kleiner als ein Tag ist. Wir schreiben nun die Bewegungsgleichung (8) in Komponenten, multiplizieren die zweite Gleichung mit der imaginären Einheit i, addieren sie zur ersten hinzu und führen die *komplexe* Grösse $\mathcal{Z} = x + i\,y$ ein (ist $\mathcal{Z}$ bekannt, so folgt $x = \Re\mathrm{e}\mathcal{Z}$ und $y = \Im\mathrm{m}\mathcal{Z}$).

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_o^2\,x + 2\omega_z\,\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega_o^2\,y - 2\omega_z\,\dot{x} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\mathcal{Z}=x+iy]{} \qquad \ddot{\mathcal{Z}} + 2i\omega_z\,\dot{\mathcal{Z}} + \omega_o^2\,\mathcal{Z} = 0\,;$$

mit der bezüglich der Erdoberfläche vertikalen Komponente der Winkelgeschwindigkeit der Erde $\omega_z = \omega \sin\psi$ (man beachte: ω_z ist positiv auf der Nordhalbkugel, aber negativ auf der Südhalbkugel). Die entstandene DGL für $\mathcal{Z}$ ist linear, homogen, mit konstanten Koeffizienten; wir können sie also mit dem Exponentialansatz behandeln.

$$\mathcal{Z} = C\,e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2i\omega_z\lambda + \omega_o^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1/2} = i\left[-\omega_z \pm \sqrt{\omega_o^2 + \omega_z^2}\right] \equiv i(-\omega_z \pm \Omega)$$

Mit den beiden komplexen Integrationskonstanten C_1, C_2 erhalten wir die *allgemeine* Lösung der DGL

$$\boxed{\mathcal{Z} = e^{-i\omega_z t}\left(C_1\, e^{i\,\Omega t} + C_2\, e^{-i\,\Omega t}\right)}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen (8):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{Z}(0) &= a = C_1 + C_2 \\ \dot{\mathcal{Z}}(0) &= 0 = -i\,\omega_z(C_1 + C_2) + i\,\Omega(C_1 - C_2) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_{1/2} = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{\omega_z}{\Omega}\right)$$

Die spezielle Lösung zu unseren Anfangsbedingungen lautet demnach

$$\mathcal{Z}(t) = e^{-i\,\omega_z t}\; a\left(\cos\Omega t + i\,\frac{\omega_z}{\Omega}\sin\Omega t\right) \;\Rightarrow\; \left\{\begin{aligned} x &= a\left[+\cos\omega_z t\cos\Omega t + \left(\frac{\omega_z}{\Omega}\right)\sin\omega_z t\sin\Omega t\right] \\ y &= a\left[-\sin\omega_z t\cos\Omega t + \left(\frac{\omega_z}{\Omega}\right)\cos\omega_z t\sin\Omega t\right] \end{aligned}\right.$$

Diskussion der Grössenordnungen der verschiedenen Terme:

$$\Omega = \sqrt{\omega_o^2 + \omega_z^2} = \omega_o\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_o}\right)^2} \approx \omega_o\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_z}{\omega_o}\right)^2\right] \approx \omega_o\,;$$

der dann in Ω vernachlässigte Term ist dann für ein Pendel mit $l = 20\,\mathrm{m}$ in der Grössenordnung von 10^{-8}. Die *führenden* Terme in unserer Lösung sind also:

$$\mathcal{Z}(t) \approx e^{-i\,\omega_z t}\, a\cos\omega_o t \;\Rightarrow\; \left\{\begin{aligned} x &\approx a\cos\omega_z t\cos\omega_o t \\ y &\approx -a\sin\omega_z t\cos\omega_o t \end{aligned}\right.$$

(*Bem.*: VORSICHT bei Vernachlässigungen im Argument einer Winkelfunktion; dort muss gewährleistet sein, dass auch das Produkt der vernachlässigten Terme mit noch in Betracht kommenden grossen Zeiten (hier: $\approx$ 1Tag) *klein* gegen 2π bleibt, was in unserem Fall gewährleistet ist (vernachlässigter Term: $\frac{1}{2}\omega_o\left(\frac{\omega_z}{\omega_o}\right)^2\frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{1}{2}\frac{\omega_z}{\omega_o}2\pi \sim 2\pi\,10^{-4}$).)

Der Einfluss der Erdrotation besteht also in einer Drehung der Pendelbahn um die Vertikale mit $|\omega_z|$ im/entgegen Uhrzeigersinn auf der Nord-/Süd- Halbkugel.

Bemerkungen:

(i) In den Umkehrpunkten ($t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$, $n = 1, 2, \ldots$) sind $\dot{x}(t_n) = \dot{y}(t_n) = 0$, d.h. die Bahn hat dort *Spitzen.*

(ii) Drehung der Bahnebene nach m Schwingungsperioden ($t_m = 2m\pi/\Omega$):

$$\delta\varphi(t_m) = \omega_z t_m = 2\pi\, m\,\frac{\omega_z}{\Omega} \approx 2\pi\, m\,\frac{\omega_z}{\omega_o}$$

Zur graphischen Darstellung der Bahn nutzen wir *dimensionslosen* Grössen:
$\xi = x/a,\ \eta = y/a,\ \mu = \omega_z/\Omega,\ \tau = \Omega t$
und erhalten so:

$$\mathcal{Z}(\tau)/a = e^{-i\,\mu\tau}\left(\cos\tau + i\,\mu\,\sin\mu\tau\right) \;\Rightarrow\; \left\{\begin{aligned} \xi(\tau) &= \cos\mu\tau\;cos\tau + \mu\,\sin\mu\tau\,\sin\tau \\ \eta(\tau) &= -\sin\mu\tau\;cos\tau + \mu\,\cos\mu\tau\,\sin\tau \end{aligned}\right.$$

Im abgebildeten Beispiel wurde $\mu = 0.1$ gewählt, um den charakteristischen Bahnverlauf mit den Spitzen an den Umkehrpunkten zu verdeutlichen. Der reale Wert liegt für ein Pendel mit $l \approx 20\,\text{m}$ bei $\mu \approx 10^{-4}$.