Institut für Theoretische Physik Prof. Dr. S. Kobe	Theoretische Mechanik SS 04	

Lösung zur 9. Übung

1. Die *holonom - rheonome* Nebenbedingung hat die Form:

$$\Phi(\vec{r},t) = z - [x - \xi(t)]\tan\alpha = 0 \tag{1}$$

Die LAGRANGE-Gleichungen 1.Art lauten:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}} \qquad \text{mit:} \quad \vec{F} = -mg\,\vec{e}_z\,; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}} = \vec{e}_z - \vec{e}_x\,\tan\alpha \tag{2}$$

In Komponenten:

$$m\ddot{x} = -\lambda\,\tan\alpha \tag{3}$$
$$m\ddot{y} = 0 \tag{4}$$
$$m\ddot{z} = -mg + \lambda \tag{5}$$

Die Bewegung in y-Richtung ist: $y(t) = v_{oy}t + y_o$; mit den gegebenen Anfangsbedingungen wird $v_{oy} = 0\,, y_o = 0$.
λ wird mit (5) aus (3) eliminiert:

$$\lambda = m(\ddot{z} + g) \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -(\ddot{z} + g)\tan\alpha \tag{7}$$

Zweimalige Zeitdifferentiation der Nebenbedingung (1) liefert:

$$\ddot{z} = (\ddot{x} - \ddot{\xi})\tan\alpha \tag{8}$$

Damit kann $\ddot{z}$ in (7) eliminiert werden und es folgt eine DGL für $x(t)$, die sofort integriert werden kann (Anfangsbedingungen berücksichtigen).

$$\ddot{x} = \sin\alpha\,(\ddot{\xi}\,\sin\alpha - g\,\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \sin\alpha\left[\xi(t)\sin\alpha - \frac{g\cos\alpha}{2}\,t^2\right]} \tag{9}$$

Mit (9) lässt sich $z(t)$ sofort aus der Nebenbedingung (1) berechnen:

$$\boxed{z(t) = -\sin\alpha\left[\xi(t)\,\cos\alpha + \frac{g\,\sin\alpha}{2}\,t^2\right]} \tag{10}$$

Um die Zwangskraft zu angeben zu können, müssen wir λ mit (6) und (35) bestimmen:

$$\lambda = m[-\sin\alpha\,(\ddot{\xi}\cos\alpha + g\sin\alpha) + g] = m\,\cos\alpha\,(g\cos\alpha - \ddot{\xi}\sin\alpha)$$

Mit (2) wird dann:

$$\boxed{\vec{Z} = \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}} = m(g\cos\alpha - \ddot{\xi}\sin\alpha)(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z)}$$

Spezialfall: $\ddot{\xi}(t) = b \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = \frac{b}{2}t^2$

$$x(t) = \frac{t^2}{2}\sin\alpha\,(b\sin\alpha - g\cos\alpha)\,, \quad z(t) = -\frac{t^2}{2}\sin\alpha\,(b\cos\alpha + g\sin\alpha)$$

$$\vec{Z} = m(g\cos\alpha - b\sin\alpha)(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z)$$

Setzt man ferner noch $g = 0$, so erhält man als Ergebnis (welches sich auch leicht über die LAGRANGE-Gleichungen 2.Art bestimmen lässt):

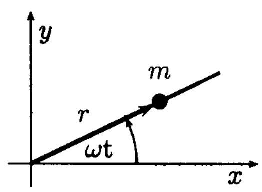
$$x(t) = \frac{bt^2}{2}\sin^2\alpha\,; \quad z(t) = -\frac{bt^2}{2}\sin\alpha\,\cos\alpha\,; \quad \vec{Z} = -mb\,\sin\alpha\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z)$$

2. Das konservative System besitzt zwei holonome Zwangsbedingungen; davon ist eine skleronom und die andere rheonom:

$$z = 0, \tag{11}$$
$$y = x\tan(\omega t). \tag{12}$$

Als generalisierte Koordinate bietet sich der Abstand der Perle vom Koordinatenursprung an

$$q = r. \tag{13}$$



Mit den Transformationsformeln

$$x = q\cos(\omega t), \quad y = q\sin(\omega t), \quad z = 0 \tag{14}$$

berechnen wir die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\omega^2\right), \tag{15}$$

die wegen $V = 0$ identisch mit der LAGRANGE-Funktion ist

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + q^2\omega^2\right). \tag{16}$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = m\ddot{q} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = mq\omega^2 \quad . \tag{17}$$

bzw.

$$\ddot{q} = q\omega^2. \tag{18}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differential-Gleichung lautet

$$q(t) = Ae^{wt} + Be^{-wt}. \tag{19}$$

Die Bewegung in x und y Richtung erhalten wir aus Gleichung (14)

$$x(t) = q(t)\cos(\omega t), \quad y(t) = q(t)\sin(\omega t). \tag{20}$$

Bem.:

- Mit den Anfangsbedingungen $q(t=0) = r_0$ und $\dot{q}(t=0) = 0$ folgt z.B. $A = B = r_0/2$ und damit

$$q(t) = \frac{1}{2} r_0 (e^{wt} + e^{-wt}). \tag{21}$$

Die Perle bewegt sich also mit wachsender Beschleunigung für $t \to \infty$ nach aussen. Dabei nimmt die Energie der Perle zu, da die Zwangskraft an der Perle Arbeit leistet.

- Wählen wir die Anfangsbedingungen alternativ zu $q(t=0) = r_0$ und $\dot{q}(t=0) = -r_0\omega$ erhalten wir als Bestimmungsgleichungen für A und B

$$r_0 = A + B, \quad -r_0\omega = (A - B)\omega. \tag{22}$$

Daraus ergibt sich $A = 0$ und $B = r_0$. Die Lösung lautet mithin

$$q(t) = r_0 e^{-wt}. \tag{23}$$

Für diesen Fall bewegt sich die Perle also mit abnehmender Geschwindigkeit auf den Drehpunkt zu, um dort zur Ruhe zu kommen.

- Da die gefundene LAGRANGE-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängig ist, erhalten wir die HAMILTON-Funktion als Erhaltungsgrösse des Systems (siehe Aufg. 3)

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L}, \tag{24}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \tfrac{m}{2}\left(\dot{q}^2 - q^2\omega^2\right) = \text{const.}} \tag{25}$$

Der erste Term in Gleichung (25) rührt dabei von der kinetischen Energie des mitbewegten Beobachters, der zweite Term entspricht dem Potential einer Kraft auf den mitbewegten Beobachter (die zugehörige Kraft ist natürlich die Zentrifugalkraft). Da die Transformation von kartesischen auf die generalisierten Koordinaten hier explizit von der Zeit abhängt ist die HAMILTON-Funktion für dieses System nicht mit der Energie $E = T + V$ identisch.

3. (a) In Zylinderkoordinaten ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$) gilt

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi \\ z &= z & \Rightarrow \quad & \dot{z} = \dot{z} \end{aligned}$$

Der Orts- und Geschwindigkeitsvektor lauten damit (siehe 2. Übung Aufg. 2)

$$\begin{aligned} \vec{r}(\rho,\varphi,z) &= \rho(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) + z\,\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z, \\ \dot{\vec{r}}(\rho,\varphi,z) &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) + \dot{z}\,\vec{e}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie erhalten wir damit

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{26}$$

Die verallgemeinerten Kraftkomponenten Q_k für einen Massenpunkt sind bestimmt über

$$Q_k = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \tag{27}$$

bzw. den Zusammenhang mit der kinetischen Energie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \tag{28}$$

Damit erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}
m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 &= Q_\rho = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \vec{F}\cdot\vec{e}_\rho && (29)\\
m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} &= Q_\varphi = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \vec{F}\cdot\rho\vec{e}_\varphi && (30)\\
m\ddot{z} &= Q_z = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{F}\cdot\vec{e}_z. && (31)\\
& && (32)
\end{aligned}$$

Für den Fall einer konservativen Zentralkraft mit $\vec{F} = \vec{\nabla}V$ erhalten wir für die generalisieren Kraftkomponenten

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \tag{33}$$

(b) In Zylinderkoordinaten ist $|\vec{e}_z \times \vec{r}| = \rho$ und wir erhalten für die gesuchte LAGRANGE-Funktion

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{\alpha}{\rho}} \tag{34}$$

(c) φ und z sind *zyklische Koordinaten* ($\mathcal{L}$ hängt *nicht* von ihnen ab); die zugehörigen kanonischen Impulse sind Erhaltungsgrössen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} \equiv p_z = const = mv_{oz}$$

Das ist die *Erhaltung* der z-Komponente des Impulses; die Bewegung in z-Richtung erfolgt also *gleichförmig*:

$$\boxed{z(t) = v_{oz}t + z_o} \tag{35}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \equiv p_\varphi = const \tag{36}$$

Das ist die *Erhaltung* der z-Komponente des Drehimpulses.

Bem.: Diese beiden Erhaltungssätze sind anschaulich sofort klar, wenn wir uns die zugehörige Kraft aufschreiben ($\rho = |\vec{e}_z \times \vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$):

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}} = -\alpha\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial\vec{r}} = \frac{\alpha}{\rho^2}\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(x^2+y^2)\\
\vec{F} &= \frac{\alpha}{\rho^3}(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y) = \frac{\alpha}{\rho^2}\vec{e}_\rho = -\frac{\alpha}{|\vec{e}_z\times\vec{r}|^3}\vec{e}_z\times(\vec{e}_z\times\vec{r});
\end{aligned}$$

Die Kraft zeigt also nur in $\vec{e}_\rho$-Richtung; die z- und φ-Komponente verschwinden!

Das Teilchen bewegt sich in einem rein ortsabhängigen Potential; daher ist auch die Energie E eine Erhaltungsgrösse:

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) + \frac{\alpha}{\rho} = const \tag{37}$$

Bemerkung:
Die Energieerhaltung folgt im LAGRANGEformalismus aus der *expliziten Zeitunabhängigkeit* der LAGRANGEfunktion.
Beweis: Wir schreiben zunächst die *totale* Zeitableitung von $\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_f; \dot q_1, \ldots, \dot q_f; t)$ auf (wobei wir die Summenkonvention benutzen: über gleiche Indizes ist von $1 \ldots f$ zu summieren):

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}\ddot q_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}\dot q_k$$

Im letzten Term auf der rechten Seite setzen wir die LAGRANGEgleichungen ein und stellen nach der partiellen Zeitableitung um:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}\ddot q_k - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}\right)\dot q_k$$

Nun sehen wir, dass die beiden letzten Terme die Zeitableitung eines Produktes darstellen und erhalten:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}\dot q_k\right)$$

Die explizite Zeitunabhängigkeit der LAGRANGEfunktion hat also einen Erhaltungssatz zur Folge:

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}\dot q_k - \mathcal{L} = p_k\dot q_k - \mathcal{L} = H = const}$$

(Hier haben wir die Definition der kanonischen Impulse p_k und der HAMILTONfunktion H benutzt.) Die Erhaltungsgrösse ist die HAMILTONfunktion.
Die HAMILTONfunktion H ist dann mit der Energie $E = T + V$ identisch, falls

- $\mathcal{L} = T - V$ gilt *und*
- die Transformation von den kartesischen auf die verallgemeinerten Koordinaten *nicht explizit* von der Zeit abhängt; also falls $x_l = x_l(q_1, \ldots, q_f)$, d.h. $\frac{\partial x_l}{\partial t} = 0$; das wird i.a. für *skleronome* Zwangsbedingungen der Fall sein.

(d) Die noch unbekannten Funktionen $\rho(t)$ und $\varphi(t)$ lassen sich aus den beiden Erhaltungssätzen (36) und (37) bestimmen; die LAGRANGEgleichung für ρ muss gar nicht aufgeschrieben werden. Dabei herrscht vollständige Analogie zum KEPLER/COULOMBproblem.

$$p_\varphi = m\rho^2\dot\varphi\,; \qquad E' \equiv E - \frac{m}{2}v_{oz}^2 = \frac{m}{2}\dot\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho}$$

Durch Vergleich mit der bekannten Lösung für die Bahnkurven des KEPLER/COULOMBproblems (siehe z.B.: Vorlesung oder 5.Übung, Aufg.4(b)) erhalten wir:

$$\boxed{\rho(\varphi) = \frac{k}{\epsilon\cos\varphi - \frac{\alpha}{|\alpha|}}} \quad \text{mit} \quad k = \frac{p_\varphi^2}{m|\alpha|} \quad \text{und} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E'}{m}\left(\frac{p_\varphi}{\alpha}\right)^2}$$

Das Vorzeichen der Energie E' bestimmt die Bahnform:

$$\boxed{E' \begin{array}{ccl} > & 0 & \text{Hyperbel} \\ = & 0 & \text{Parabel} \\ < & 0 & \text{Ellipse} \end{array}}$$

Die Bahnkurven sind also *Schrauben* mit konstanter Ganghöhe in z-Richtung, deren Projektion auf die x-y-Ebene *Kegelschnitte* sind.