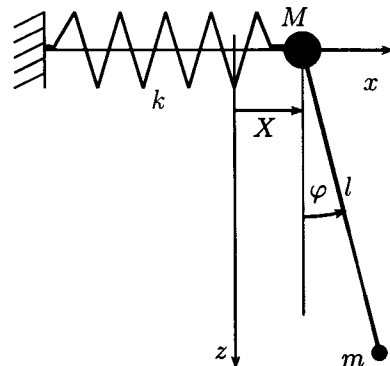


Lösung zur 10. Übung

1. (a) Das System hat $f = 2$ Freiheitsgrade; als *angepasste verallgemeinerte Koordinaten* wählen wir die Auslenkung X der Masse M aus ihrer Ruhelage, in die wir auch den Nullpunkt der x -Koordinate legen und den Auslenkwinkel φ des Pendels aus der Vertikalen; die Nebenbedingungen sind dann für alle Werte, die X und φ annehmen können, erfüllt. Das System ist konservativ; die LAGRANGE-Funktion ist also durch $\mathcal{L} = T - V$ gegeben. Wir müssen nun die kinetische und potentielle Energie in diesen Koordinaten darstellen.



Da T und V meist in kartesischen Koordinaten eine einfache Form haben, schreibt man sich am besten die Transformationsformeln zwischen den kartesischen und den angepassten Koordinaten auf; für m gilt:

$$\begin{aligned} x &= X + l \sin \varphi, & \dot{x} &= \dot{X} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ z &= l \cos \varphi, & \dot{z} &= -l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{X}\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ V &= -mgz + \frac{k}{2} X^2 = -mgl \cos \varphi + \frac{k}{2} X^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(X, \varphi, \dot{X}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{(M + m)}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + ml\dot{X}\dot{\varphi} \cos \varphi + mgl \cos \varphi - \frac{k}{2} X^2$$

- (b) Die LAGRANGE-Gleichungen ergeben sich mit \mathcal{L} zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (M + m)\ddot{X} + ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= -kX \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{X} \cos \varphi &= -g \sin \varphi \end{aligned}$$

Das ist ein System gekoppelter nichtlinearer DGLn.

- *(c) *Linearisierung* für $\varphi \ll 1$:

Mit TAYLOREntwicklung bis zum linearen Term in φ wird: $\cos \varphi \approx 1$ und $\sin \varphi \approx \varphi$. Ferner gilt mit $\varphi \ll 1$ auch $\varphi^2 \ll 1$ und damit ist $\ddot{\varphi} \gg \dot{\varphi}^2 \varphi$, denn

mit der charakteristischen Zeit τ für die Pendelschwingung gilt: $\ddot{\varphi} \sim \varphi/\tau^2$ und $\dot{\varphi} \sim \varphi/\tau$. Die *linearisierten* Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{X} + kX + ml\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{X} + l\ddot{\varphi} + g\varphi &= 0\end{aligned}$$

Mit den speziellen Werten $M = 3m$, $m = kl/4g$ und $g/l \equiv \omega_0^2$ wird schliesslich:

$$\begin{aligned}4\ddot{X} + 4\omega_0^2 X + l\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{X} + l\ddot{\varphi} + \omega_0^2(l\varphi) &= 0\end{aligned}$$

Das ist ein *lineares, homogenes* DGLsystem 2. Ordnung, welches wir lösen können; es beschreibt die gekoppelten linearen Schwingungen von X und $l\varphi$. Wir suchen die Lösung mit einem Ansatz, bei dem *beide* Koordinaten mit *derselben* Frequenz ω_λ , aber mit unterschiedlichen Amplituden schwingen; dieser Ansatz überführt das DGLsystem in ein homogenes *algebraisches* Gleichungssystem für die Amplituden.

$$\text{Ansatz: } \vec{q} \equiv \begin{pmatrix} X \\ l\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\lambda X} \\ a_{\lambda \varphi} \end{pmatrix} e^{i\omega_\lambda t} \Rightarrow \begin{aligned}4(\omega_0^2 - \omega_\lambda^2) a_{\lambda X} - \omega_\lambda^2 a_{\lambda \varphi} &= 0 \\ -\omega_\lambda^2 a_{\lambda X} + (\omega_0^2 - \omega_\lambda^2) a_{\lambda \varphi} &= 0\end{aligned}$$

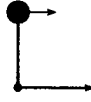
Eine nichttriviale Lösung für \vec{a} existiert nur, falls die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$4(\omega_0^2 - \omega_\lambda^2)^2 = \omega_\lambda^4 \Rightarrow \omega_\lambda^2 = \pm 2(\omega_0^2 - \omega_\lambda^2) \Rightarrow \omega_\lambda^2 = \frac{2}{2 \pm 1} \omega_0^2$$

$$\boxed{\omega_I^2 = \frac{2g}{3l}}$$

Einsetzen in das Gleichungssystem liefert das Amplitudenverhältnis:

$$-\frac{2}{3}\omega_0^2 a_{IX} + \frac{1}{3}\omega_0^2 a_{I\varphi} = 0$$

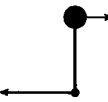
$$\boxed{\frac{a_{I\varphi}}{a_{IX}} = 2}$$


symmetrische Eigenschwingung

$$\boxed{\omega_{II}^2 = \frac{2g}{l}}$$

Einsetzen in das Gleichungssystem liefert das Amplitudenverhältnis:

$$-2\omega_0^2 a_{IIX} - \omega_0^2 a_{II\varphi} = 0$$

$$\boxed{\frac{a_{II\varphi}}{a_{IIX}} = -2}$$


antisymmetrische Eigenschwingung

Die *allgemeine* Lösung ist eine *Linearkombination* der beiden Fundamentallösungen (für die komplexen $a_{\lambda X}$ setzen wir $a_{\lambda X} = c_\lambda e^{i\alpha_\lambda}$, mit reellen c_λ und α_λ , und gehen zum Realteil über):

$$\boxed{\begin{aligned}X &= c_I \cos(\omega_I t + \alpha_I) + c_{II} \cos(\omega_{II} t + \alpha_{II}) \\ l\varphi &= 2c_I \cos(\omega_I t + \alpha_I) - 2c_{II} \cos(\omega_{II} t + \alpha_{II})\end{aligned}}$$

mit den vier Integrationskonstanten $c_I, \alpha_I, c_{II}, \alpha_{II}$.

2. Für die Bewegung des 3-atomigen Moleküls entlang der x -Achse lauten kinetische und potentielle Energie in den Koordinaten x_k ($k = 1, 2, 3$):

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2; \quad V = \frac{k}{2} [(x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2].$$

Damit ist die LAGRANGEfunktion in den Koordinaten $q_k := x_k - x_k^o$:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{q}_2^2 - \frac{k}{2} [(q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2]; \quad \text{bzw. mit}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}; \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} (a_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m - b_{lm} q_l q_m)}$$

(1)

Hierbei wurde die *Summenkonvention* benutzt, d.h. über gleiche Indizes ist von 1-3 zu summieren. Die LAGRANGEgleichungen lauten dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{kl} \ddot{q}_l + b_{kl} q_l = 0$$

Dies stellt ein System gekoppelter linearer homogener Dgln 2.Ordnung dar, das durch den Ansatz der *Fundamentalschwingungen* gelöst wird, bei denen *alle* Teilchen mit der *gleichen* Frequenz ω_λ schwingen:

$$q_k = C_{k\lambda} e^{i\omega_\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(b_{kl} - \omega_\lambda^2 a_{kl}) C_{l\lambda} = 0}, \quad \text{bzw.: } (\hat{b} - \omega_\lambda^2 \hat{a}) \vec{C}_\lambda = 0. \quad (2)$$

Damit ist das System von Dgln in ein System homogener *algebraischer* Gln. 2.Grades überführt worden, das als (verallgemeinertes) Eigenwertproblem interpretiert werden kann (Eigenwerte ω_λ^2 ; Eigenvektoren \vec{C}_λ mit den Komponenten $C_{l\lambda}$, die die Matrix der Eigenvektoren \hat{C} bilden). Ein solches Gleichungssystem besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{aligned} \text{Lösbarkeitsbed: } \det(\hat{b} - \omega_\lambda^2 \hat{a}) = 0 &\Rightarrow (k - m\omega_\lambda^2)^2 (2k - M\omega_\lambda^2) - 2k^2 (k - m\omega_\lambda^2) = 0 \\ &\Rightarrow \omega_\lambda^2 (k - m\omega_\lambda^2) [mM\omega_\lambda^2 - k(M + 2m)] = 0. \end{aligned}$$

Damit lauten die Frequenzen der drei Fundamentalschwingungen:

$$\boxed{\omega_I^2 = \frac{k}{m}; \quad \omega_{II}^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right); \quad \omega_{III}^2 = 0}$$

Die zugehörigen drei Eigenvektoren erhält man, indem man das jeweilige ω_λ in (2) einsetzt und eine der drei Gleichungen streicht (durch die verschwindende Determinante sind nur noch zwei der drei Gleichungen linear unabhängig voneinander!); daraus folgen also die Verhältnisse der Komponenten der Eigenvektoren:

$$C_{2I} = 0, \quad \frac{C_{1I}}{C_{3I}} = -1; \quad \frac{C_{1II}}{C_{2II}} = -\frac{M}{2m} = \frac{C_{3II}}{C_{2II}}; \quad C_{1III} = C_{2III} = C_{3III}$$

Will man die *Normalkoordinaten* bestimmen, muss man die Eigenvektoren noch normieren gemäss

$$C_{k\lambda} a_{kl} C_{l\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \text{bzw. in Matrixform } \boxed{\hat{C}^T \hat{a} \hat{C} = \hat{E}}. \quad (3)$$

((3) stellt eine verallgemeinerte Orthonormalitätsrelation der Eigenvektoren dar). Die normierten Eigenvektoren lauten dann in unserem Fall (unter den Eigenvektoren sind qualitativ die zu diesen Fundamentalschwingungen gehörigen Bewegungen der Massen gezeichnet):

$$\vec{C}_I = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{C}_{II} = \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{C}_{III} = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Wie man aus (3) ersieht, transformiert die Matrix \hat{C} der normierten Eigenvektoren die Matrix \hat{a} der kinetischen Energie auf die Einheitsmatrix \hat{E} . Die Matrix \hat{b} der potentiellen Energie wird durch \hat{C} auf Diagonalform transformiert (mit den Eigenfrequenzen ω_λ^2 in der Diagonale), denn mit (2) und (3) wird:

$$C_{k\lambda} b_{kl} C_{l\lambda'} = C_{k\lambda} a_{kl} C_{l\lambda'} \omega_\lambda^2 = \boxed{\omega_\lambda^2 \delta_{\lambda\lambda'} = (\hat{C}^T \hat{b} \hat{C})_{\lambda\lambda'}} \quad (4)$$

Die allgemeine Lösung unseres gekoppelten *linearen* Dglsystems ist eine *Linearkombination* der drei Fundamentalschwingungen (wobei natürlich nur der Realteil der komplexen Lösung physikalisch relevant ist):

$$q_k = \sum_{\lambda=1}^3 C_{k\lambda} A_\lambda e^{i\omega_\lambda t} \equiv C_{k\lambda} Q_\lambda \quad \rightarrow \quad \sum_{\lambda=1}^3 |A_\lambda| C_{k\lambda} \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda) \quad (5)$$

Hierbei wurde für die komplexen Integrationskonstanten $A_\lambda = |A_\lambda| e^{i\delta_\lambda}$ geschrieben, mit reellen $|A_\lambda|$ und δ_λ ; die allgemeine Lösung enthält also 6 reelle Integrationskonstanten, wie es sein muss. Die oben eingeführten Q_λ sind die *Normalkoordinaten*. Sie ergeben sich durch die Umkehrung von (5) unter Beachtung von (3) zu

$$Q_\lambda = C_{l\lambda} a_{lk} q_k \quad \text{bzw.} \quad \vec{Q} = \hat{C}^T \hat{a} \vec{q}. \quad (6)$$

In unserem Fall erhalten wir für die Q_λ

$$\begin{pmatrix} Q_I \\ Q_{II} \\ Q_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2m}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} & -\sqrt{\frac{2m}{M(M+2m)}} & \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} \\ \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{M+2m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q_I &= \sqrt{\frac{m}{2}} (-q_1 + q_3) \\ Q_{II} &= \sqrt{\frac{M}{1+2m}} (+\frac{1}{2}q_1 - q_2 + \frac{1}{2}q_3) \\ Q_{III} &= \frac{1}{\sqrt{M+2m}} (+mq_1 + Mq_2 + mq_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Ersetzt man in der LAGRANGEfunktion (1) die q_l gemäss (5) durch die Q_λ und beachtet (3) und (4), so ergibt sich

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 (\dot{Q}_\lambda^2 - \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) = \frac{1}{2} [(\dot{Q}_I^2 - \omega_I^2 Q_I^2) + (\dot{Q}_{II}^2 - \omega_{II}^2 Q_{II}^2) + (\dot{Q}_{III}^2 - \omega_{III}^2 Q_{III}^2)],$$

was ein System *ungekoppelter* Oszillatoren darstellt; die Normalkoordinaten entkoppeln also unser Bewegungsproblem; die Bewegungsgleichungen für die Q_λ lauten also

$$\ddot{Q}_\lambda + \omega_\lambda^2 Q_\lambda = 0.$$

Der spezielle Fall $\omega_{III} = 0$ führt auf $\ddot{Q}_{III} = 0 \Rightarrow Q_{III} = A + v_0 t$, also eine gleichförmige Bewegung. Wie man aus (7) sieht, entspricht die dritte Normalkoordinate der (hier trivialen) Schwerpunktbewegung, für die *keine* äussere Kraft existiert. Diese Schwerpunktbewegung hätte man von vornherein abspalten und nur die beiden Schwingungsfreiheitsgrade explizit behandeln können, indem man

- entweder die Schwerpunktkoordinate und geeignete Differenzkoordinaten einführt:

$$X = \frac{m(x_1 + x_3) + Mx_2}{M + 2m}; \quad r_1 = x_2 - x_1 - a; \quad r_2 = x_2 - x_3 - a$$

$$\Rightarrow L = \frac{M + 2m}{2} \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \frac{m(m + M)(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) - 2m^2 \dot{r}_1 \dot{r}_2}{M + 2m} - \frac{k}{2} (r_1^2 + r_2^2)$$

$$\text{also: } \hat{a} = \frac{1}{M + 2m} \begin{pmatrix} m(M + m) & -m^2 \\ -m^2 & m(M + m) \end{pmatrix}; \quad \hat{b} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- oder die Bewegung gleich im Schwerpunktsystem beschreibt, d.h. die Zusatzforderung $m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0$ stellt; mit der Wahl $x_3^0 = -x_1^0 = a$; $x_2^0 = 0$ folgt dann $q_2 = -\frac{m}{M}(q_1 + q_3)$, d.h. es gibt nur noch *zwei* unabhängige Koordinaten q_1, q_3 .

Die Normalkoordinaten repräsentieren eine *kollektive* Bewegung der Teilchen mit *gleicher* Frequenz. Eine dieser Normal- oder Fundamentalschwingungen wird als Lösung realisiert für *spezielle* Ab, so dass in (5) *ein* $A_\lambda \neq 0$ und die beiden anderen $A_{\lambda'} \equiv 0$ sind; das lässt sich z.B. bei verschwindenden Anfangsgeschwindigkeiten durch Anfangsauslenkungen gemäss der jeweiligen \vec{C}_λ erreichen.

Abschliessend sei die allgemeine Lösung (5) unseres Problems explizit ausgeschrieben, wobei wir anstelle der $|A_\lambda|$ die neuen Integrationskonstanten d_λ, v einführen, die die jeweiligen Normierungskonstanten der \vec{C}_λ mit enthalten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = d_I \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_I t + \delta_I) + d_{II} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{II} t + \delta_{II}) + (d_{III} + vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um nur diese Lösung anzugeben, muss man natürlich *nicht* die Normalkoordinaten Q_λ berechnen und braucht auch die Eigenvektoren \vec{C}_λ *nicht* zu normieren.

*3. Zu zeigen: mit $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q [U(\vec{r}(t), t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}(t), t)]$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{d}{dt} [m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}(\vec{r}(t), t)] = m\ddot{\vec{r}} + q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q \left(\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} &= -q \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + q \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) \\ \Rightarrow m \ddot{\vec{r}} &= q \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) - \left(\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{A} \right] \\ m \ddot{\vec{r}} &= q \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A} \right) \right] \\ m \ddot{\vec{r}} &= q (\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$