Lösung zur 12. Übung

1. (a)

$$\text{POISSONklammer: } \{F,G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

Bem: *In der Vorlesung wurde die Poissonklammer mit dem umgekehrten Vorzeichen definiert, was dazu führt, dass die Elementarklammer zwischen q_k und p_l lautet $\{p_k, q_l\} = \delta_{kl}$, im Gegensatz zu Gleichung (6).*

Algebraische Eigenschaften der POISSONklammern (deren Beweis ist elementar möglich):

$$F = const \quad \Rightarrow \quad \{F,G\} = 0\ \forall G \tag{1}$$

$$\{F,G\} = -\{G,F\} \qquad \textit{Antikommutativität} \tag{2}$$

$$\{\alpha F_1 + \beta F_2, G\} = \alpha\{F_1, G\} + \beta\{F_2, G\} \qquad \textit{Distributivität} \tag{3}$$

$$\{F_1F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + \{F_1, G\}F_2 \qquad \textit{Produktregel} \tag{4}$$

$$\{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} = 0 \qquad \text{JACOBI}\textit{identität} \tag{5}$$

Bem.: Zusammen mit den *elementaren* Klammern zwischen den *kanonisch konjugierten* Variablen

$$\{q_k, q_l\} = 0; \quad \{p_k, p_l\} = 0; \quad \{q_k, p_l\} = \delta_{kl} \tag{6}$$

kann man (1) - (5) als Axiome für ein abstraktes Klammersymbol als Paarverknüpfung in einem linearen Raum auffassen. Es gibt dann neben den POISSONklammern weitere verschiedene Realisierungen für dieses Klammersymbol; z.B. der Kommutator zwischen quadratischen Matrizen oder Operatoren (siehe Quantenmechanik); die Rechenregeln (1) - (5) gelten unabhängig von der Realisierung. Alle Ergebnisse, die wir nur unter Zuhilfenahme dieser Regeln herleiten, gelten also auch für andere Klammersymbole.

- $$\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ikl}\{q_k p_l, p_j\} = \epsilon_{ikl}\left[q_k\{p_l, p_j\} + \{q_k, p_j\}p_l\right] = \epsilon_{ijl}\, p_l \tag{7}$$

  Im ersten Gleichheitszeichen wurde (3), im zweiten (13), im letzten (6) verwendet.
  Es ist also z.B.: $\{L_x, p_y\} = p_z$; $\{L_y, p_x\} = -p_z$, usw.

- $$\{L_i, q_j\} = \epsilon_{ikl}\{q_k p_l, q_j\} = \epsilon_{ikl}\left[q_k\{p_l, q_j\} + \{q_k, q_j\}p_l\right] = \epsilon_{ijk}\, q_k \tag{8}$$

  Also ist z.B.: $\{L_x, q_z\} = -q_y$, usw.

- $$\{L_i, L_j\} \;=\; \epsilon_{ikl}\{q_k p_l, L_j\} \;=\; \epsilon_{ikl}\left[q_k\{p_l, L_j\} + \{q_k, L_j\}p_l\right]$$

$$
\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= -\epsilon_{ikl}\left(\epsilon_{jlm} q_k p_m + \epsilon_{jkm} q_m p_l\right) \\
&= \left(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj}\right) q_k p_m - \left(\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj}\right) q_m p_l \\
&= q_i p_j - p_i q_j = \epsilon_{ijk} L_k
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Hier wurden im dritten Gleichheitszeichen (7) und (8), im vierten Indexumordnung und der *Hinweis* (aus der Aufgabenstellung) und im letzten der *Hinweis* 'rückwärts' benutzt.
Speziell ist: $\{L_x, L_y\} = L_z$.
Die POISSONklammern zwischen Drehimpulskomponenten verschwinden also *nicht*.

•

$$\{L_i, \vec{L}^2\} = \{L_i, L_j L_j\} = \{L_i, L_j\} L_j + L_j \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k L_j + \epsilon_{ijk} L_j L_k$$

$$\{L_i, \vec{L}^2\} = \epsilon_{ijk} L_k L_j + \epsilon_{ikj} L_k L_j = \epsilon_{ijk} L_k L_j - \epsilon_{ijk} L_k L_j = 0$$

(In der zweiten Zeile wurden beim ersten Gleichheitszeichen die Summationsindizes im zweiten Term umbenannt: $j \to k$, $k \to j$; im zweiten Gleichheitszeichen haben wir $\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}$ benutzt.)
Die POISSONklammer zwischen *jeder* Drehimpulskomponente und dem Quadrat des Drehimpulses verschwindet also.

(b) Die totale Zeitableitung einer physikalischen Grösse $\vec{L}$ ergibt sich im Formalismus der POISSONklammern aus:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \{\vec{L}, H\} + \frac{\partial \vec{L}}{\partial t}$$

Der Drehimpuls hängt nur über $q_i(t)$ und $p_k(t)$ von der Zeit ab; er weist *keine explizite* Zeitabhängigkeit auf; also verschwindet der letzte Term. Die Zeitableitung von $\vec{L}$ ist somit allein durch die POISSONklammer von $\vec{L}$ mit H gegeben. Betrachten wir nun die Komponente L_i:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} &= \{L_i, H\} = \frac{1}{2m}\{L_i, p_k p_k\} + \{L_i, V(q)\} \\
&= \frac{1}{2m}\left(p_k\{L_i, p_k\} + \{L_i, p_k\} p_k\right) + \epsilon_{ikl}\{q_k p_l, V(q)\}
\end{aligned}
$$

Hier steht $V(q)$ für $V(q_1, q_2, q_3)$. Setzen wir in den beiden ersten Termen der zweiten Zeile (7) ein, so sehen wir, dass diese Terme Null ergeben. Den letzten Term formen wir mit der *Produktregel* um, beachten, dass die Klammer von q_k mit einer beliebigen Funktion der q_l stets verschwindet und benutzen die Definition der POISSONklammern:

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2m}\left(\epsilon_{ikl} p_k p_l + \epsilon_{ikl} p_l p_k\right) + \epsilon_{ikl}\left(q_k\{p_l, V(q)\} + \{q_k, V(q)\} p_l\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = \epsilon_{ikl} q_k \left(\frac{\partial p_l}{\partial q_m}\frac{\partial V(q)}{\partial p_m} - \frac{\partial p_l}{\partial p_m}\frac{\partial V(q)}{\partial q_m}\right) = -\epsilon_{ikl} q_k \frac{\partial V(q)}{\partial q_l} = \epsilon_{ikl} q_k F_l$$

Hier wurde der Zusammenhang zwischen Kraft $\vec{F}$ und Potential $V(\vec{r})$ benutzt. Der letzte Ausdruck stellt die i-Komponente des Vektorproduktes des Ortsvektors $\vec{r}$ mit der Kraft $\vec{F}$ dar.

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = (\vec{r} \times \vec{F})_i \, ; \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist also durch das Drehmoment der Kraft gegeben.

2. (a) Eine Transformation von alten Koordinaten $q_1, .., q_f$ und $p_1, .., p_f$ auf neue $Q_1, .., Q_f$, $P_1, .., P_f$ ist *kanonisch*, wenn eine *Erzeugende* $F_1(q_1, .., q_f, Q_1, .., Q_f, t)$ existiert für die gilt:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{10}$$

Hierbei bezeichnet $H^* = H^*(Q_1, ..Q_f, P_1, .., P_f, t)$ die transformierte HAMILTON-Funktion, für welche die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_i}. \tag{11}$$

$F_1(q_1, .., q_f, Q_1, .., Q_f, t)$ verknüpft also die alten mit den neuen Variablen und bestimmt die Transformation vollständig, darüberhinaus ist durch F_1 auch die neue HAMILTON-Funktion vollständig festgelegt.

(b) Am Beispiel des harmonischen Oszillators kann man eindrucksvoll demonstrieren, wie geeignet gewählte kanonische Transformationen die Integration der Bewegungsgleichungen stark vereinfachen.

Mit Gleichung (10) ergibt sich:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega_0 q \cot Q \tag{12}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}. \tag{13}$$

Die eigentlichen Transformationsformeln erhalten wir, indem wir nach q und p Auflösen

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q,$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega_0} \cos Q. \tag{14}$$

Da F_1 nicht explizit von der Zeit abhängt folgt für die neue HAMILTON-Funktion

$$H^*(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \frac{1}{2m} 2Pm\omega_0 \cos^2 Q + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q. \tag{15}$$

Sie nimmt also eine besonders einfache Gestalt an:

$$H^*(Q, P) = \omega_0 P, \tag{16}$$

aus der wir ablesen, dass die Koordinate Q zyklisch ist. Mithin gilt

$$P(t) = P_0 = \text{const.} \tag{17}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H^*}{\partial P} = \omega_0, & (18)\\ Q(t) &= \omega_0 t + Q_0. & (19) \end{aligned}$$

Die Lösung ist vollständig, wenn wir die Gleichungen (17) und (19) in die Transformationsformeln (14) einsetzen:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0), & (20)\\ p(t) &= \sqrt{2P_0 m\omega_0} \cos(\omega_0 t + Q_0). & (21) \end{aligned}$$

Das ist die bekannte Lösung des harmonische Oszillators. Q_0 und P_0 sind dabei durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

(*) Um die POISSONklammer

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \tag{22}$$

zu berechnen, benötigen wir die neuen Koordinaten als Funktion der alten, d.h $Q = Q(q,p)$ bzw. $P = P(q,p)$. Aus Gleichung (12) erhalten wir

$$Q = \operatorname{arccot}\left(\frac{p}{m\omega_0 q}\right) = \arctan\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right) \tag{23}$$

Einsetzen in Gleichung (13) liefert

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2\left(\arctan\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)\right)} & (24)\\ &= \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{\frac{m\omega_0 q}{p}}{\sqrt{1+\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2}}\right)\right)} & (25)\\ &= \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \frac{1+\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2}{\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2} & (26)\\ &= \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \left(1+\left(\frac{p}{m\omega_0 q}\right)^2\right). & (27)\\ &= \frac{1}{2}\frac{p^2}{m\omega_0} + \frac{1}{2} m\omega_0 q^2. & (28) \end{aligned}$$

Mit $\frac{d}{dx}\arctan x = 1/(1+x^2)$ erhalten wir für die POISSONklammer

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\frac{m\omega_0}{p}\left(\frac{p}{m\omega_0}\right)}{1+\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2} - \frac{\left(-\frac{m\omega_0 q}{p^2}\right) m\omega_0 q}{1+\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2} & (29)\\ &= \frac{1+\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2}{1+\left(\frac{m\omega_0 q}{p}\right)^2} & (30)\\ &= 1. & (31) \end{aligned}$$

Die zwei verbleibenden fundamentalen POISSONklammern sind trivial $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$.

Bem: *Allgemein kann bewiesen werden, dass eine Transformation genau dann kanonisch ist, wenn die fundamentalen* POISSON*klammern (s.o) erfüllt sind.*

(c) Wir wissen bereits, dass eine Transformation $(q_1, .., q_f) \Rightarrow (Q_1, .., Q_f)$ *kanonisch* ist, falls gilt

$$p_k \dot{q}_k - H = P_k \dot{Q}_k - H^* + \frac{dF_1}{dt}, \tag{32}$$

wobei $F_1 = F_1(q_1, .., q_f, Q_1, .., Q_f, t)$ die *Erzeugende* der Transformation bezeichnet. Über doppelt vorkommende Indizes ist wie immer zu summieren. Für das Differential von F_1 gilt damit

$$dF_1 = (p_k dq_k - P_k dQ_k) + (H^* - H)\, dt. \tag{33}$$

Aus diesem Differential lassen sich per Koeffizientenvergleich mit

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \tag{34}$$

die bekannten Relationen für die Transformation ableiten, siehe Gleichung (10). In Analogie dazu wollen wir nun das Differential von $F_2(q_1, .., q_f, P_1, .., P_f, t)$ betrachten. Es gilt

$$F_2 \;=\; F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} Q_k = F_1 + P_k Q_k, \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

und damit

$$dF_2 = dF_1 + (P_k dQ_k + Q_k dP_k) = p_k dq_k + Q_k dP_k + (H^* - H)\, dt. \tag{37}$$

Verglichen mit

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt \tag{38}$$

erhalten wir somit

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{39}$$

Die dritte Gleichung bestätigt uns, dass die neue HAMILTON-Funktion durch die Kenntnis von $F_2(q_1, .., P_1, .., t)$ vollständig festgelegt ist.

Sind die $q_1, .., q_f, p_1, ..p_f$ und F_2 vorgegeben, so löst man

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = p_k(q_1, .., P_1, .., t) \tag{40}$$

nach P_k auf und erhält damit die erste Hälfte der Transformationsgleichungen

$$P_k = P_k(q_1, .., p_1, .., t). \tag{41}$$

Das setzen wir in

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k(q_1, .., P_1, .., t) \tag{42}$$

ein und erhalten dann

$$Q_k = Q_k(q_1, .., p_1, .., t). \tag{43}$$

Diese Überlegungen setzen natürlich voraus, das die Funktion F_2 alle notwendigen Voraussetzungen bezüglich der Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit erfüllt. Das die neue HAMILTON-Funktion durch F_2 vollständig festgelegt ist

*(d) Um zu demonstrieren, dass auch F_2 eine kanonische Transformation vermittelt, starten wir mit Gleichung (32) und drücken dF_1 mittels Gleichung (37) aus

$$\begin{aligned} p_k\dot{q}_k - H &= P_k\dot{Q}_k - H^* + \frac{dF_1}{dt} && (44)\\ &= P_k\dot{Q}_k - H^* + \frac{dF_2}{dt} - \left(P_k\dot{Q}_k + Q_k\dot{P}_k\right) && (45)\\ &= -Q_k\dot{P}_k - H^* + \frac{dF_2}{dt}. && (46) \end{aligned}$$

Setzen wir den Ausdruck aus Gleichung (46) ins HAMILTONsche Wirkungsfunktional ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,(p_k\dot{q}_k - H(q,p,t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-Q_k\dot{P}_k - H^* + \frac{dF_2}{dt}\right) && (47)\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-Q_k\dot{P}_k - H^*\right) \\ &\quad + F_2(q_1(t_2), .., P_1(t_2), .., t_2) - F_2(q_1(t_1), .., P_1(t_1), .., t_1). && (48)\\ & && (49) \end{aligned}$$

Statt nach $q_1, .., q_f$ und $p_1, .., p_f$ muss $\mathcal{J}$ nun nach den $Q_1, .., Q_f$ und $P_1, .., P_f$ variiert werden. Nach Voraussetzung soll gelten,

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{J} &= \delta\left(F_2(q_1(t_2), .., P_1(t_2), .., t_2) - F_2(q_1(t_1), .., P_1(t_1), .., t_1)\right) + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\delta Q_k\dot{P}_k - Q_k\delta\dot{P}_k - \frac{\partial H^*}{\partial Q_k}\delta Q_k - \frac{\partial H^*}{\partial P_k}\delta P_k\right). && (50) \end{aligned}$$

Da die $q_k(t_1), q_k(t_2)$ für die Variation fest sind, gilt

$$\delta\left(F_2(q_1(t_2), .., P_1(t_2), .., t_2) - F_2(q_1(t_1), .., P_1(t_1), .., t_1)\right) = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}\delta P_k \,|_{t_1}^{t_2}. \tag{51}$$

Wenn wir nun noch umformen

$$\int_{t_1}^{t_2} dt Q_k\delta\dot{P}_k = Q_k\delta P_k \,|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\dot{Q}_k\delta P_k, \tag{52}$$

so bleibt

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{J} &= \left(-Q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k}\right)\delta P_k \,|_{t_1}^{t_2} + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta P_k\left(\dot{Q}_k - \frac{\partial H^*}{\partial P_k}\right) - \delta Q_k\left(\dot{P}_k + \frac{\partial H^*}{\partial Q_k}\right)\right). && (53) \end{aligned}$$

Mit Gleichung (39) ist der erste Summand Null und wegen der Unabhängigkeit der neuen Variablen Q_k und P_k folgen dann aus Gleichung (53) die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_k}. \tag{54}$$

Die durch $F_2(q_1, .., q_f, P_1, .., P_f, t)$ erzeugte Transformation ist also tatsächlich *kanonisch*.

**(e) Wiederholen wir die Prozedur aus (c), so erhalten wir als totales Differential von $F_4(p_1, .., P_1, .., t)$

$$dF_4 = Q_k dP_k - q_k dp_k + (H^* - H)dt. \tag{55}$$

Damit ergibt sich

$$Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}, \quad q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}, \quad H^* = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}, \tag{56}$$

und durch Invertieren und Auflösen nach $Q_1, .., Q_f$ und $P_1, .., P_f$ erhalten wir wieder die expliziten Transformationsformeln. Zum Beweis der Kanonizität der Transformation vermittelt durch F_4 setzen wir nun

$$p_k\dot{q}_k - H = \dot{p}_k q_k + p_k\dot{q}_k - \dot{P}_k Q_k - H^* + \frac{dF_4}{dt} \tag{57}$$

in das HAMILTONsche Prinzip ein, variieren nach $Q_1, .., Q_f, P_1, .., P_f$ und verifizieren damit die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen.