



Lösung zur 13. Übung

1. Der Stab und das System Σ seien in relativer Ruhe zueinander und man misst zur Zeit $t_1 = t_2$ die Länge des Stabes durch den Abstand der beiden Endpunkte

$$l = x_2 - x_1. \quad (1)$$

Bei der Längenmessung im mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegten Bezugssystem Σ' ergibt sich für die Positionen der Endpunkte

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2). \quad (2)$$

Auch in Σ' müssen wir nun die Koordinaten zur gleichen Zeit ablesen, es muss also gelten $t'_1 = t'_2$ und nicht etwa $t_1 = t_2$. Es gilt mithin

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right), \quad (3)$$

bzw.

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \quad (4)$$

und damit

$$l' = x'_2 - x'_1 = \gamma\left[x_2 - x_1 - \frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5)$$

Der in Σ ruhende Massstab der Länge l erscheint also in Σ' um den Faktor $(1 - \beta^2)^{1/2} < 1$ verkürzt.

Nun ruhe der Massstab im System Σ' , entsprechend erhalten wir nun

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'_1), \quad x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2), \quad (6)$$

und

$$t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1\right) = t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right), \quad (7)$$

bzw.

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1). \quad (8)$$

Damit bekommen wir

$$\tilde{l} = x_2 - x_1 = \gamma\left[x'_2 - x'_1 - \frac{v^2}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right] = \tilde{l}'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (9)$$

und der bewegte Massstab erscheint diesmal in Σ um $(1 - \beta^2)^{1/2} < 1$ verkürzt. Entscheidend ist, dass die Längenmessung vorschreibt die Positionen der Enden *gleichzeitig* abzulesen. Das Gleichzeitigkeitskriterium ist aber für verschiedene Inertialsysteme verschieden und das überträgt sich auf die Ergebnisse der Längenmessungen.

2. Bei einer Relativgeschwindigkeit von $v = 3c/5$ ergibt sich γ zu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}. \quad (10)$$

Da sich Σ' relativ zu Σ in x -Richtung bewegt ändern die y - und z - Koordinate ihren Wert nicht:

$$y = y' = 15 \text{ m}, \quad z = z' = 10 \text{ m}. \quad (11)$$

Die x -Koordinate und die Zeit t im System Σ erhalten wir aus der Lorentztransformation unter Verwendung von $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$,

$$x = \gamma(x' + vt') = \frac{5}{4} \left(20 + \frac{9}{5} 4 \right) \text{ m} = 34 \text{ m}, \quad (12)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \frac{5}{4} \left(4 + \frac{1}{5} 20 \right) \cdot 10^{-8} \text{ s} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \quad (13)$$

3. Im relativistischen Fall gilt:

$$E_{kin}^{rel} = c^2(m - m_0); \quad m = \gamma m_0; \quad E = mc^2 = c\sqrt{\vec{p}^2 + (m_0 c)^2}; \quad \vec{p} = m\vec{v}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir erweitern die Definition der relativistischen kinetischen Energie mit $c^2(m + m_0)$ und nutzen die Ausdrücke für die Gesamtenergie E

$$\begin{aligned} E_{kin}^{rel} &= c^2(m - m_0) = \frac{c^2(m - m_0) c^2(m + m_0)}{c^2(m + m_0)} = \frac{c^4(m^2 - m_0^2)}{c^2(m + m_0)} \\ &= \frac{c^2(\vec{p}^2 + (m_0 c)^2) - m_0^2 c^4}{c^2(m + m_0)} = \frac{\vec{p}^2}{m + m_0} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Für $v \rightarrow c$ (ultrarelativistischer Fall) wird: $\frac{1}{\gamma} \rightarrow 0$; $m_0 \ll m$ und damit

$$E_{kin}^{rel} \approx \frac{\vec{p}^2}{m} = \frac{m\vec{v} \cdot \vec{p}}{m} = \vec{v} \cdot \vec{p} = pv \approx pc \quad \text{q.e.d.}$$

Im ultrarelativistischen Fall verhält sich das Teilchen der Masse m_0 also wie ein Photon mit $m_0 = 0$, für das exakt gilt $E = E_{kin}^{rel} = pc$.

Bem.: Diese Relation findet z.B. Anwendung in der statistischen Physik bei der Behandlung eines ultrarelativistischen Gases wechselwirkungsfreier Teilchen; dieses verhält sich also wie ein Photongas.

4. Für den Zerfall eines Teilchens (wie für jede Art von Stossprozessen) gilt die *Erhaltung des Viererimpulses*

$$P^\kappa = m_0 u^\kappa = (mc, m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \text{const} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \text{const}, E = \text{const}}$$

Vor dem Zerfall verschwindet der Impuls; daher muss der Gesamtimpuls nach dem Zerfall auch verschwinden. Damit gilt nach dem Zerfall:

$$\text{Impulssatz: } \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu \equiv \vec{p}; \quad \text{Energiesatz: } m_{0\pi} c^2 = c\sqrt{p_\mu^2 + (m_{0\mu} c)^2} + c|\vec{p}_\nu|$$

Man beachte, dass der relativistische Energiesatz auch für den inelastischen Stoss gilt; die inneren Anregungsenergien sind in der Ruhemasse enthalten! Für den Impuls nach dem Zerfall erhalten wir:

$$\Rightarrow \boxed{p = |\vec{p}_\mu| = |\vec{p}_\nu| = \frac{m_{o\pi}^2 - m_{o\mu}^2}{2m_{o\pi}} c} = \frac{(273^2 - 207^2)(m_{oe}c^2)^2}{2 \cdot 273 m_{oe}c^2 \cdot c} = \frac{29.7}{c} \text{ MeV}$$

Die kinetischen Energien ergeben sich zu

$$E_{kin,\mu} = E_\mu - m_{o\mu}c^2 = c\sqrt{p_\mu^2 + (m_{o\mu}c)^2} - m_{o\mu}c^2 = 4.1 \text{ MeV}$$

$$E_{kin,\nu} = E_\nu = pc = 29.7 \text{ MeV}$$

Wegen $\vec{p} = m\vec{v}$ und $E = mc^2$ folgt für die Geschwindigkeit eines Teilchens $\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$; damit also $v_\nu = c$; $v_\mu = 0.27 c$.