Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. G. Soff

Theoretische Mechanik SS 04

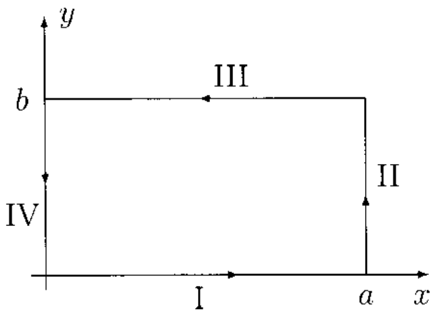
Lösung zur 3. Übung

1. (a) *Parameterdarstellung* des Kreises: Parameter φ, $\varphi = 0 \ldots 2\pi$

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R\cos\varphi & \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x &= -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y(\varphi) &= R\sin\varphi & \mathrm{d}y &= \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \oint \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, R = 2\pi R$$

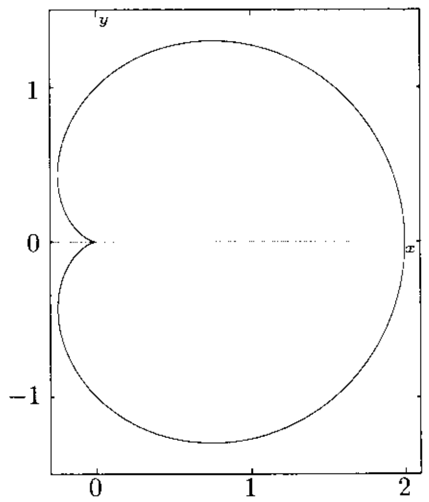
(b) *Parameterdarstellung* der vier Seiten:



I: Parameter: $x = 0 \ldots a$, $y = 0$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}x|$
II: Parameter: $y = 0 \ldots b$, $x = a$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}y|$
III: Parameter: $x = a \ldots 0$, $y = b$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}x|$
IV: Parameter: $y = b \ldots 0$, $x = 0$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}y|$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{d}s + \int_{\mathrm{II}} \mathrm{d}s + \int_{\mathrm{III}} \mathrm{d}s + \int_{\mathrm{IV}} \mathrm{d}s = 2\int_0^a \mathrm{d}x + 2\int_0^b \mathrm{d}y = 2(a+b)$$

*(c) *Vorbemerkung:* Die Kardioide wird durch einen markierten Punkt auf dem Umfang eines Kreises beschrieben, wenn dieser an einem festen Kreis mit gleichem Durchmesser a abrollt ohne zu rutschen.



Kardioide $\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi$

Das Bogenlängenelement in ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten mit $z = 0$ oder Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \pi/2$) erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\varphi) &= \rho(\varphi)\,\vec{e}_\rho(\varphi) \Longrightarrow \\ \mathrm{d}\vec{r} &= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\rho + \rho\vec{e}_\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,; \end{aligned}$$

damit wird

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}\,| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\,. \quad \text{Wegen } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = -a\sin\varphi \quad \text{erhalten wir}$$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2} = \sqrt{2}\,a\,2\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}$$