

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde noch berücksichtigt, daß der Integrand symmetrisch zu $\varphi = \pi$ ist. Das Integral kann mit der Substitution $\cos \varphi = u$ gelöst werden (beachte: $d\varphi = -du/\sqrt{1-u^2}$)

$$s = 2\sqrt{2}a \int_{-1}^1 du \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{2}a \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = 2\sqrt{2}a \left(-2\sqrt{1-u} \Big|_{-1}^1 \right) = 8a$$

Bem.: Andere Möglichkeit unter Benutzung eines Additionstheorems:

$$\begin{aligned} s &= 2\sqrt{2}a \int_0^\pi d\varphi \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)} = 2\sqrt{2}a \int_0^\pi d\varphi \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}a \sqrt{2} \int_0^\pi d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{2}a \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\psi \cos\psi = 8a \end{aligned}$$

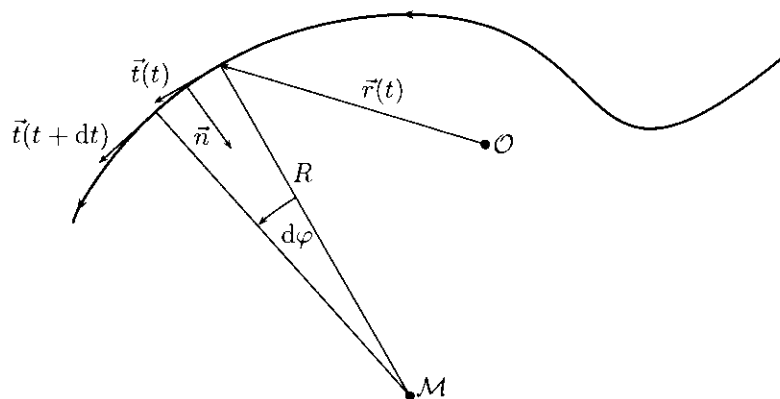
2. Für die Geschwindigkeit gilt (ds sei die in dt von der Punktmasse zurückgelegte Bogenlänge; siehe auch Vorlesung):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v\vec{t} \quad \text{mit} \quad \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds}; \quad v = \frac{ds}{dt}; \quad ds = |d\vec{r}|$$

Damit erhalten wir für die Beschleunigung (beachte: $v(t)$ und $\vec{t}(t)$; Produktregel!):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt}$$

Diskussion von $d\vec{t}$:



Da $\vec{t}$ ein Einheitsvektor ist, muß seine Änderung $d\vec{t}$ senkrecht zu $\vec{t}$ sein:

$$\vec{t}^2 = 1 \quad \implies \quad \vec{t} \cdot d\vec{t} = 0 \quad \implies \quad d\vec{t} \perp \vec{t}$$

$\vec{t}$, $\vec{t} + d\vec{t}$ sowie das in dt überstrichene Kurvenstück liegen in einer Ebene, der sog. *Schmiegungebene*; damit liegt auch $d\vec{t}$ in derselben Ebene. Der Einheitsvektor $\vec{n}$ in Richtung von $d\vec{t}$ heißt *Hauptnormale*. Approximieren wir das während dt zurückgelegte Bahnkurvenelement durch einen Kreisbogen vom Radius R (*momentaner Krümmungsradius der Kurve*), so zeigt $\vec{n}$ zum *momentanen Krümmungsmittelpunkt*