$\mathcal{M}$; der Radius R überstreicht während $\mathrm{d}t$ den Winkel $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}s/R$. Der Winkel zwischen $\vec{t}$ und $\vec{t} + \mathrm{d}\vec{t}$ ist ebenfalls $\mathrm{d}\varphi$ (Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen). Es gilt also:

$$|\mathrm{d}\vec{t}\,| = \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}s}{R} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}\vec{t} = \vec{n}\,\frac{\mathrm{d}s}{R} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t} = \vec{n}\,\frac{v}{R} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\,\vec{n}} \quad \text{q.e.d.}$$

Die für die Bewegung auf der Bahnkurve notwendige Kraft ist (zweites NEWTONsches Axiom):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\,\vec{n}\right)$$

Der erste Term $m\dot{v}\vec{t}$ ist die *Tangentialkraft*, die das Teilchen in Tangentialrichtung beschleunigt, also den *Betrag* der Geschwindigkeit ändert.
Der zweite Term $\vec{n}\,v^2/R$ ist die *Normal-* oder *Radialkraft*, die die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert, damit *senkrecht auf der Bahn* steht und stets zum momentanen Krümmungsmittelpunkt zeigt.

Speziell: **Kreisbewegung:** R=const; $\vec{r} = R\vec{e}_\rho$
Wir verwenden *ebene Polarkoordinaten* (die sich aus den Zylinderkoordinaten für $z = 0$ ergeben).

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\,\dot{\vec{e}}_\rho = R\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi \quad\Longrightarrow\quad \vec{t} = \vec{e}_\varphi\,;$$

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}\right|}\,; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\vec{e}_\rho\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \vec{n} = -\vec{e}_\rho$$

$$\vec{F} = m\left(\dot{v}\vec{e}_\varphi - \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_\rho\right)$$

(a)

$$v = const \quad\Longrightarrow\quad \vec{F} = -m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_\rho$$

Es muß also nur eine Radialkraft wirken, die die Richtung der Geschwindigkeit ändert.

(b)

$$v = ct \quad\Longrightarrow\quad \vec{F} = m\left(c\vec{e}_\varphi - \frac{c^2t^2}{R}\,\vec{e}_\rho\right)$$

Zusätzlich zur Radialkraft muß noch eine Tangentialkraft wirken, die den Betrag der Geschwindigkeit erhöht.