Lösung zur 4. Übung

1. (a)

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

Da x, y, z unabhängige Variablen sind, verschwinden alle Ableitungen. Also ist

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{r} \equiv \frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{r} = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \cdot \vec{r} = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

Jede der Ableitungen ergibt eins. Also ist:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{r} \equiv \frac{\partial}{\partial\vec{r}} \cdot \vec{r} = 3}$$

(b)

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \circ \vec{r}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen also, dass das Ergebnis gleich dem Einheitstensor $\hat{I}$ ist:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \circ \vec{r} = \hat{I}}$$

(c) Wenn wir den Nablaoerator auf gegebene Funktionen von $\vec{r}$ anwenden, ist es vorteilhaft, möglichst nicht auf die Komponentendarstellung zurückzugreifen, sondern die Ableitungen mit Hilfe der *Regeln* der *Differential-* **und** *Vektorrechnung* auf die drei in (a) und (b) hergeleiteten Grundregeln zurückzuführen. Das wollen wir nun an vier Beispielen üben:

- $$\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{r} = \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \circ \vec{r}\right) = \vec{a} \cdot \hat{I} = \vec{a}$$

- $$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \circ \vec{r}\right) \cdot \vec{a} = \hat{I} \cdot \vec{a} = \vec{a}$$