

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} r = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r})$$

Hier haben wir die *Kettenregel* benutzt. Im weiteren muss von der *Produktregel* Gebrauch gemacht werden. Dabei entsteht ein Bezeichnungsproblem: üblicherweise steht der zu differenzierende Ausdruck hinter dem Differentialoperator und alles, was nicht zu differenzieren ist, steht davor; diese Konvention tritt manchmal in Konflikt mit den Regeln der Vektorrechnung. Um klarzustellen, auf welchen Ausdruck der Nablaoperator wirkt, wird dieser Ausdruck mit einem $\downarrow$ gekennzeichnet; alles was dann hinter einem Nabla steht und keinen $\downarrow$ trägt, ist bei der Differentiation konstant zu halten. Produktregel und Regel (b) ergeben:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}) = 2 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \circ \vec{r} \right) \cdot \vec{r} = 2 \hat{I} \cdot \vec{r} = 2\vec{r}$$

Damit lautet das Ergebnis:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{r}} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r}$$

Der *Gradient des Betrages des Ortsvektors* ist also gleich dem *Einheitsvektor* in $\vec{r}$ -Richtung.

- Mit dem soeben erhaltenen Resultat sowie mit der Kettenregel wird:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} r = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

2. $V(\vec{r})$ existiert, falls $\text{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$. Mit dem Entwicklungssatz für das doppelte Kreuzprodukt und den Regeln aus Aufg.1. folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})] = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{b})] = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{a}) \right]}_{=\vec{a}} \times \vec{b} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{r} \right)}_{=0} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &\implies \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{b} \stackrel{!}{=} 0 \implies \vec{b} = \alpha \vec{a}; \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ parallel!} \end{aligned}$$

Die Potentialkraft lautet also: $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})$.

Das zugehörige Potential errechnet sich zu

$$V(\vec{r}) = -\alpha \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r}')] = \alpha \int_0^{\vec{r}} [d(\vec{a} \times \vec{r}')] \cdot (\vec{a} \times \vec{r}') = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\vec{r}} d[(\vec{a} \times \vec{r}')^2]$$

Hierbei haben wir beim zweiten Gleichheitszeichen $\cdot$ und $\times$ im Spatprodukt vertauscht und beachtet, dass $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist; danach wurde die Produktregel *rückwärts* angewandt.

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha}{2} (\vec{a} \times \vec{r})^2$$