Die Äquipotentialflächen sind Zylindermäntel um $\vec{a}$ als Achse. Die Kraft steht auf ihnen senkrecht; sie ist also senkrecht zu $\vec{a}$ und zeigt (für $\alpha > 0$) radial auf die $\vec{a}$ -Achse zu.

Bem.: Man kann $V(\vec{r})$ natürlich auch direkt als Linienintegral berechnen; dazu setzen wir $\vec{a} = a\vec{e}_z$ und stellen $\vec{F}$ in Zylinderkoordinaten dar: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{e}_\rho \alpha a^2 \rho$ (mit $\rho = r \sin \vartheta$, $\vartheta = \angle(\vec{r}, \vec{e}_z)$). Wir integrieren zunächst entlang der z' -Achse, wo $\vec{F}$ verschwindet, von 0 bis $z' = z$; danach in der Ebene $z' = z$ über ρ' von 0 bis $\rho = r \sin \vartheta$:

$$V(\vec{r}) = \alpha a^2 \int_0^\rho \underbrace{d\vec{r}' \cdot \vec{e}_\rho}_{d\rho'} \rho' = \frac{\alpha}{2} a^2 \rho^2 = \frac{\alpha}{2} a^2 r^2 \sin^2 \vartheta = \frac{\alpha}{2} (\vec{a} \times \vec{r})^2$$

3. (a) Für $d\vec{r}$ erhalten wir aus der gegebenen Parameterdarstellung des Integrationsweges (Ellipse mit Halbachsen $2c$ und $3c$, die entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, beginnend im Punkt $2c$ auf der x -Achse):

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dq} dq = (-2c \sin q \vec{e}_x + 3c \cos q \vec{e}_y) dq.$$

Der Integrand ist an den Punkten des Weges zu nehmen, d.h. man muss für x und y die Ausdrücke aus der Parameterdarstellung einsetzen.

$$\begin{aligned} W_C &= \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} dq (-2c \sin q \vec{e}_x + 3c \cos q \vec{e}_y) \cdot \\ &\quad \cdot [a(6c \cos q - 3c \sin q) \vec{e}_x + b(6c \sin q - 2c \cos q) \vec{e}_y] \\ &= c^2 \left[(18b - 12a) \int_0^{2\pi} dq \sin q \cos q + 6(a + b) \int_0^{2\pi} dq \sin^2 q - 6b \int_0^{2\pi} dq \right] \end{aligned}$$

(Dabei wurde $\cos^2 q = 1 - \sin^2 q$ verwendet.). Die einzelnen Integrale ergeben:

$$\int dq \sin q \cos q = -\frac{1}{4} \cos 2q; \quad \int dq \sin^2 q = \frac{q}{2} - \frac{1}{4} \sin 2q$$

Damit lautet das Ergebnis

$$\boxed{W_C = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 6\pi c^2 (a - b)}$$

- (b) Die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ besitzt ein Potential, wenn ihre Rotation verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a(3x - y) & b(2y - x) & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z (a - b) \stackrel{!}{=} 0$$

Ein Potential existiert also, wenn $\boxed{b = a}$ gilt; dann verschwindet das Linienintegral entlang *jedes* geschlossenen Weges, z.B. auch entlang C aus (a). Die Kraft lautet:

$$\vec{F}(\vec{r}) = a[(3x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y]$$