



Lösung zur 5. Übung

1. (a) Das zur Kraft $F(x) = -kx + \alpha x^2$ gehörige Potential lautet: $V(x) = \frac{k}{2} x^2 - \frac{\alpha}{3} x^3$.
Extrema befinden sich bei: $0 = V'(x) = kx - \alpha x^2 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{k}{\alpha}$.
Wegen $V''(x_1 = 0) = k > 0$ und $V''(x_2 = k/\alpha) = -k < 0$ folgt, dass bei $x_1 = 0$ ein (relatives) *Minimum* und bei $x_2 = k/\alpha$ ein (relatives) *Maximum* des Potentials vorliegt. Es ist $V(x_1 = 0) = 0$ und $V(x_2 = k/\alpha) = V_{max} = k^3/6\alpha^2$.
(Siehe auch Abbildung)

$$\text{Energiesatz: } E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 - \frac{\alpha}{3} x^3 = \frac{m}{2} v_0^2$$

(Die Gesamtenergie ergibt sich aus der Anfangsbed.: $x(0) = 0, \quad v(0) = v_0$.) Das Teilchen kehrt *nicht* wieder zum Ursprung zurück, falls seine Energie grösser als V_{max} ist, also:

$$\text{keine Rückkehr, falls: } E = \frac{m}{2} v_0^2 \geq V_{max} = \frac{k^3}{6\alpha^2} \Rightarrow \boxed{v_0 \geq +\sqrt{\frac{k^3}{3m\alpha^2}}}$$

Im Falle des anderen Vorzeichens von v_0 kehrt das Teilchen nach Reflexion am Potential (bei einem $x < 0$) *einmal* zurück und läuft dann nach $+\infty$.

- (b) Zur Diskussion der möglichen Bewegungen und der zugehörigen Phasenbahnen schreiben wir den *Energiesatz in dimensionsloser Form*, um die Zahl der unabhängigen Parameter zu reduzieren; die dimensionslosen Größen definieren wir mit Hilfe von für das Problem charakteristischen Größen (*)

$$x^* = \frac{k}{\alpha}, \quad V^* = \frac{k^3}{\alpha^2}, \quad t^* = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad v^* = \frac{x^*}{t^*} = \sqrt{\frac{k^3}{m\alpha^2}}, \quad \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{x}{x^*}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad \Phi = \frac{V}{V^*}, \quad \pi = \frac{p}{mv^*} = \frac{v}{v^*} = \frac{d\xi}{d\tau}, \quad \epsilon = \frac{E}{V^*} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{3} \xi^3 = \frac{1}{2} \pi_0^2 = \epsilon}$$

Das ist die implizite Darstellung der Phasenbahnen $\pi = \pi(\xi)$, die sich durch den jeweiligen Wert der Energie ϵ unterscheiden. Wie man an der potentiellen Energie erkennt, gibt es vier verschiedene Bewegungstypen: