berechnen, so integrieren wir von $x' = 0$ bis $x' = A$ (mit $A$ als der Amplitude der Schwingung); die verstrichene Zeit ist dann gerade $T/4$. (Wir bedenken noch, dass $V_0 < 0$ und $E < 0$ sein müssen, wenn wir eine Schwingung erhalten wollen.)

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{-|E| + \dfrac{|V_0|}{\cosh^2(x'/a)}}} = 2\sqrt{2m} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x' \cosh(x'/a)}{\sqrt{|V_0| - |E|\cosh^2(x'/a)}}$$

Wir substituieren nun: $u = \sinh(x'/a) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \cosh(x'/a)\,\mathrm{d}(x'/a)$; weiter gilt $\cosh^2 z = 1 + \sinh^2 z$. Die Amplitude bestimmt sich zu:

$$V(A) = E \;\Rightarrow\; \frac{|V_0|}{|E|} = \cosh^2\frac{A}{a} = 1 + \sinh^2\frac{A}{a} \;\Rightarrow\; u(A) = \sinh\frac{A}{a} = \sqrt{\frac{|V_0|}{|E|} - 1}$$

$$T(E) = 2\sqrt{2m}a \int_0^{u(A)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{|V_0| - |E|(1+u^2)}} = \frac{2\sqrt{2m}a}{\sqrt{|E|}} \int_0^{u(A)} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{u}{\sqrt{|\frac{V_0}{E}|-1}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{|\frac{V_0}{E}|-1}}\right)^2}}$$

Weitere Substitution ergibt:

$$z = \frac{u}{\sqrt{\left|\frac{V_0}{E}\right| - 1}} \;\Rightarrow\; T(E) = 2a\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = 2a\sqrt{\frac{2m}{|E|}}\;\arcsin z|_0^1 = 2a\sqrt{\frac{2m}{|E|}}\,\frac{\pi}{2}$$

Endgültig erhalten wir für die Energieabhängigkeit der Schwingungsdauer

$$\boxed{T(E) = \pi\, a\sqrt{\frac{2m}{|E|}}}.$$

Die Schwingungsdauer ist also *nicht* konstant, wie bei der harmonischen Schwingung, sondern hängt von der Energie und damit von der Schwingungsamplitude ab. Für kleine Schwingungen, also für $A \ll a \;\Leftrightarrow\; |E| \gtrsim |V_0|$ erhalten wir das Resultat von (c).

*Bemerkung* für Enthusiasten: Das Bewegungsproblem in diesem Potential lässt sich mit der Integration über den Energiesatz vollständig lösen.

*(c) Stabiles Gleichgewicht bei $x = 0$ nur für $V_0 < 0$, also: $V(x) = -\dfrac{|V_0|}{\cosh^2(x/a)}$

TAYLORentwicklung von $V(x)$ um $x = 0$ bis zum quadratischen Term (linearer Term verschwindet am Gleichgewichtspunkt!):

$$V(x) \approx V(0) + \frac{1}{2}V''(0)\,x^2 = -|V_0| + \frac{|V_0|}{a^2}\,x^2 \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -\frac{V''(0)}{m}\,x \text{ (harmon. Oszillator)}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{V''(0)}{m}} = \sqrt{\frac{2|V_0|}{ma^2}} \;\Rightarrow\; \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi a\sqrt{\frac{2m}{|V_0|}}}$$