Die Bewegung stellt in diesem Falle also eine *harmonische Schwingungen* um $x = 0$ dar; die Näherung ist nur gerechtfertigt für *kleine Auslenkungen* aus der Gleichgewichtslage, d.h. für $\boxed{|x| \ll a}$ (a ist die einzige Vergleichslänge in unserem Problem!)

3. (a) Die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = a\,\frac{\vec{r}}{r^{n+1}}$ ist eine konservative Zentralkraft; Drehimpuls und Energie sind also Erhaltungsgrössen. Das Potential ist:

$$V(r) = -\int F(r)\,\mathrm{d}r = \frac{a}{n-1}\,r^{-n+1} \quad \text{für } n \neq 1\,; \quad \text{für } n = 1: \;\; V(r) = -a\ln r + C$$

Der Energiesatz liefert unter Verwendung des Drehimpulssatzes ($L = mr^2\dot{\varphi} = $ const.)

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{n-1}\,r^{-n+1} \equiv \frac{m}{2}\,\dot{r}^2 + \tilde{V}_{\text{eff}}(r)$$

Stabile Kreisbahnen (d.h. $r(t) = r_*\,,\ \forall t$) sind immer dann möglich, wenn das Effektivpotential $\tilde{V}_{\text{eff}}(r)$ bei $r = r_*$ ein *Minimum* besitzt (und die Energie E gleich dem Wert des Effektivpotentials im Minimum ist); also muss gelten:

$$\tilde{V}'_{\text{eff}}(r_*) = -\frac{L^2}{mr^3} - ar^{-n}\bigg|_{r=r_*} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{L^2}{ma} = r_*^{3-n}$$

Eine Lösung für $r_* > 0$ kann nur existieren, falls $\boxed{a < 0}$; dann wird

$$r_* = \left(\frac{L^2}{m|a|}\right)^{\frac{1}{3-n}} .$$

Damit es sich um ein Minimum handelt, muss die zweite Ableitung von $\tilde{V}_{\text{eff}}(r)$ bei r_* grösser als Null sein:

$$\tilde{V}''_{\text{eff}}(r_*) = \frac{3L^2}{mr^4} - n|a|r^{-n-1}\bigg|_{r=r_*} = \frac{|a|}{r_*^{n+1}}\left(\frac{3L^2 r_*^{n-3}}{m|a|} - n\right) = \frac{|a|}{r_*^{n+1}}\,(3-n) > 0$$

(Hier haben wir das oben erhaltene r_* eingesetzt.)
Stabile Kreisbahnen sind also nur für $\boxed{n < 3}$ möglich.
$n = 2$ liefert die Gravitationskraft und $n = -1$ den dreidimensionalen harmonischen Oszillator.
Man überzeugt sich leicht, dass alle Überlegungen auch für den Fall $n = 1$ gelten.

4. (a) Wir müssen zeigen, dass $\dot{\vec{\Lambda}} = 0$ ist.
Mit $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{L}} = 0$ (Zentralkraft), $\dot{\vec{p}} = \vec{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \vec{r}} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ und $\dot{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Lambda} &= \frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} + \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\alpha}{|\alpha|}\left(\frac{1}{m\alpha}\dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2}\,\dot{r}\right) \\
&= \frac{\alpha}{|\alpha|}\left[\frac{\vec{r}}{r^3} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\vec{r}}\right)\right] = 0\,; \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(Hier haben wir noch den Entwicklungssatz für das doppelte Kreuzprodukt benutzt.)