Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. G. Soff

Theoretische Mechanik SS 04

Lösung zur 6. Übung

1. (a) Dadurch kann das Raumschiff schon die Bahngeschwindigkeit v_E der Erde um die Sonne als Beitrag zur Einschussgeschwindigkeit in die elliptische Flugbahn nutzen. Es gilt für eine kreisförmige Umlaufbahn der Erde um die Sonne mit der Periode T_E ($\epsilon_\mathrm{E} = 0.017$)

$$v_E = \omega_E R_E = \frac{2\pi}{T_E} R_E \approx 30\mathrm{km/s} \quad \text{mit} \quad T_E = 1a.$$

(b) Die Flugbahn sei eine KEPLERellipse ($\epsilon < 1$)

$$r(\phi) = \frac{k}{1 + \epsilon\cos\phi},$$

mit

$$k = \frac{L^2}{\gamma M m^2} \quad \text{und} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3}}. \tag{1}$$

Für die Bahnkurve soll gelten:

$$r(0) = R_E = \frac{k}{1+\epsilon},$$
$$r(\pi) = R_U = \frac{k}{1-\epsilon}.$$

Daraus folgt für ϵ und k

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{R_U - R_E}{R_U + R_E} = 0.9, \\ k &= R_E(1+\epsilon) = 1.9\mathrm{AU}. \end{aligned}$$

Die grosse und kleine Halbachse der Ellipse bestimmen sich zu

$$a = \frac{k}{1-\epsilon^2} = \frac{1}{2}(R_E + R_U) = 10.1\mathrm{AU},$$
$$b = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = a\sqrt{1-\epsilon^2} = 4.4\mathrm{AU}.$$

(c) Aus Gl. 1 folgt für die Energie der Bewegung

$$E = -\frac{\gamma m M}{2a} = \frac{m}{2} v(r)^2 - \frac{\gamma m M}{r}.$$

Für die Geschindingkeit ergibt sich damit

$$v(r) = \sqrt{2\gamma M(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}}\sqrt{\frac{R_E}{r}(1 - \frac{r}{2a})}\ .$$

Betrachten wir nun die minimale Fluchtgeschwindigkeit eines Raumschiffes aus dem Gravitationsbereich der Sonne, wenn das Schiff den anfänglichen Abstand R_E zur Sonne hat. Es gilt

$$E = \frac{m}{2} v_{\mathrm{Fl}}^2 - \frac{\gamma m M}{R_E} = 0,$$