daraus folgt

$$v_{\rm Fl} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_E}} = \sqrt{2}v_E \approx 42\text{km/s},$$

und damit

$$v(r) = v_{\rm Fl}\sqrt{\frac{R_E}{r}(1-\frac{r}{2a})}\ .$$

Für die notwendige Einschussgeschwindigkeit im Perihel der Ellipsenbahn folgt mithin

$$v_p = v(R_E) = v_{\rm Fl}\sqrt{1-\frac{R_E}{2a}} = v_{\rm Fl}\sqrt{\frac{R_U}{R_E+R_U}} \approx 41\text{km/s}\ .$$

Beim Start in Richtung des Erdumlaufs muss dem Schiff somit die Zusatzgeschwindigkeit $\tilde{v}_p = v_p - v_E \approx 11\text{km/s}$ erteilt werden. Hinzu kommt noch die zusätzliche Anfangsgeschwindigkeit $v_{\rm Fl}^E$ um die Erdanziehung zu überwinden:

$$v_{\rm Fl}^E = \sqrt{\frac{2\gamma M_E}{r_E}} = \sqrt{2gr_E} \approx 11\text{km/s}$$

(r_E - Erdradius, M_E - Erdmasse, g - Erdbeschleunigung).

Die Flugdauer τ bis zum Uranus erhalten wir aus dem 3. Keplerschen Gesetz:

$$\tau = \frac{T_{\rm RS}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R_E}\right)^{3/2} T_E \approx 16a.$$

Bemerkung: Die Flugdauer lässt sich bei äquivalentem Energieaufwand um 11 Jahre verkürzen, indem eine durch das Gravitationsfeld des Jupiter unterstützte Bahnkurve ("swingby") gewählt wird (s. Greiner: Mechanik I, S. 346ff).

2. (a) Die (eindimensionale) Impulsbilanz bei äusserer Kraft $-mg$ (Bewegungsglg.) lautet

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -mg \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = -mg\,\mathrm{d}t\,;$$

wobei dp die Änderung des Gesamtimpulses (Rakete *und* in dt ausgestossene Verbrennungsgase) bedeutet. Aus dieser Impulsbilanz versuchen wir die Bewegungsglg. für die Rakete allein zu gewinnen:

$$\overbrace{\underbrace{m(t+\mathrm{d}t)\,v(t+\mathrm{d}t)}_{\text{Impuls Rakete zu } t+\mathrm{d}t} + \underbrace{|\mathrm{d}m|\,\underbrace{(v(t)-v_g)}_{\text{Gasgeschw. im Inertialsystem}}}_{\text{Impuls des ausgestossenen Gases } |\mathrm{d}m|}}^{\text{Gesamtimpuls zu } t+\mathrm{d}t} - \underbrace{m(t)\,v(t)}_{\text{Impuls Rakete zu } t} = -mg\,\mathrm{d}t$$