$$\text{Division durch } \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) + \frac{|\mathrm{d}m|}{\mathrm{d}t}(v - v_g) = -mg\,.$$

Nach Anwenden der Produktregel im ersten Term und Beachten von $\mathrm{d}m < 0$, $\mu = -\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ erhalten wir die Bewegungsgleichung für die Rakete:

$$\boxed{m(t)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mu(t)\,v_g(t)}_{\text{Schubkraft}} - m(t)g} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu(t)\,v_g(t)}{m(t)} - g\,.$$

Für den Massenverlust der Rakete in $\mathrm{d}t$ kann man schreiben: $\mathrm{d}m = -\rho_g A v_g\,\mathrm{d}t$; woraus für den Zusammanhang zwischen μ und v_g folgt: $\boxed{\mu = \rho_g A v_g}$.

(b) Mit $-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \mu = const$ erhält man: $\boxed{m(t) = m_0 - \mu t}$. Zur Zeit $t = t^* = \frac{m_0}{\mu}$ ist also die gesamte Raketenmasse "verheizt"; die Beschleunigungsphase kann also höchstens bis $t = t^*$ dauern; mit dieser charakteristischen Zeit t^* lässt sich eine *dimensionslose Zeit* $\tau = t/t^*$ definieren.

Mit dem $m(t)$ und mit einer konstanten Ausströmgeschwindigkeit v_g ergibt sich eine Differentialglg. für $v(t)$ in der Beschleunigungsphase ($\tau < 1$), die direkt integriert werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu v_g}{m_0 - \mu t} - g \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \mathrm{d}t'\,\frac{\mathrm{d}v(t')}{\mathrm{d}t'} = \int_0^t \mathrm{d}t'\left(\frac{\mu v_g}{m_0 - \mu t'} - g\right)$$

Mit $v(0) = 0$ wird

$$\boxed{v(t) = v_g \ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt} = v_g \ln\frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_0}t} - g\frac{m_0}{\mu}\frac{\mu}{m_0}t$$

Im letzten Term sehen wir, dass sich eine charakteristische Geschwindigkeit $v^* \equiv g\frac{m_0}{\mu} = gt^*$ definieren lässt; damit führen wir den Parameter $\nu \equiv \frac{v_g}{v^*}$ ein und schreiben die *Lösung in dimensionsloser Form:*